令和２年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [I] (125 点)　令和元年 8 月 28 日 (水) 13:00 – 14:20

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと。

(2) 問題冊子はこの表紙を含め 5 枚、解答用紙は 2 枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使って良い。

(5) 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [I]

[A-I] 1 次元の 1 質点系を考える。この系のラグランジアンを $L(q,\dot{q})$ とし、$L(q,\dot{q})$ は時刻 t に陽に依存しないとする。ここで、q は一般化座標であり、時刻 t の関数である。時刻 $t = t_1, t_2$ $(t_1 < t_2)$ に対して、作用 $S[q]$ を次式で定義する。

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q,\dot{q})$$

変分原理 (または、最小作用の原理) により、$q(t_1)$ と $q(t_2)$ を固定すれば、この系の時刻 t $(t_1 < t < t_2)$ の運動は、$S[q]$ が停留値をとるように決まる。q の任意の微小な仮想変位を δq と表す。また、対応する $\dot{q}$ の微小な仮想変位は、$\delta\dot{q} = d(\delta q)/dt$ である。

(1) q を $S[q]$ に対して変分原理を満たす関数とする。$\delta q(t_1)$ と $\delta q(t_2)$ が満たす条件を書きなさい。

(2) $L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q})$ を $\delta q,\ \delta\dot{q}$ でべき展開し、$\delta q,\ \delta\dot{q}$ の 2 次以上の項を無視した表式を求めなさい。

(3) $S[q]$ の変分 $\delta S[q]$ を $\delta S[q] = S[q+\delta q] - S[q]$ で定義する。問 (1) と問 (2) の結果を用い、$\delta S[q]$ の表式を求めなさい。ただし、この表式は $\delta\dot{q}$ を含まない形とする。また、この結果を用いて、オイラー・ラグランジュ方程式を導きなさい。

[A-II] 図 1 に示すように、バネの一端に質点がつながれており、他端は壁に固定されている。質点は 1 次元運動をし、その運動方向にはバネから受ける力のみが働くとする。質点の質量を m、バネのバネ定数を k とする。質点の時刻 t の位置をバネの自然長からの伸び q で表し、この 1 質点系の一般化座標とする。

(1) この系のラグランジアン $L(q,\dot{q})$ を書きなさい。

(2) 問 (1) の $L(q,\dot{q})$ に対するオイラー・ラグランジュ方程式を求めなさい。

(3) $E(t)$ を次式で定義する。

$$E(t) = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\,\dot{q} - L(q,\dot{q})$$

問 (1) の $L(q,\dot{q})$ を用いて、$E(t)$ の表式を求めなさい。また、$E(t)$ が保存量であることを示しなさい。

(4) q の一般解を求めなさい。

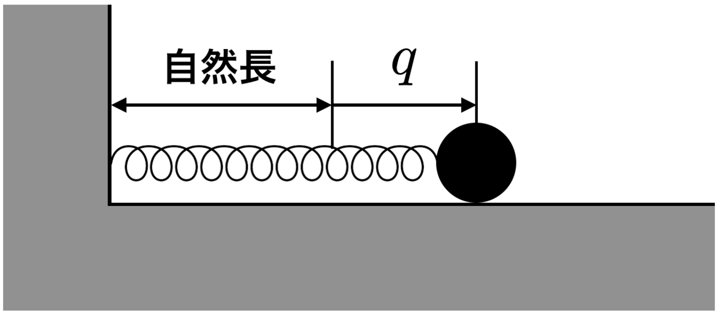

図 1

[B] 軸対称なコマを考える。コマの質量を M、 軸の長さを ℓ、軸のまわりの慣性モーメントを I とする。コマの軸の下端を原点 O とし、静止直交 xyz 座標系を考える。

図 2 に示すように、コマの軸が z 軸上にあり、コマの軸の上端から見て反時計回りに角速度 ω_1 で高速回転している場合を考える。ただし、コマの軸の下端は、原点 O から動かないとする。

(1) コマの角運動量ベクトルを求めなさい。

(2) コマの軸の上端に x 軸の正の方向の撃力を加える。撃力の原点 O のまわりのモーメントの方向を答えなさい。

(3) 撃力は、短い時間 Δt の間のみ働き、その大きさは時間平均で F であったとする。撃力を受けた直後のコマの角運動量ベクトルを求めなさい。

(4) 撃力を受けた直後、コマの軸が z 軸となす角を θ とする。問 (3) の結果を用いて、角 θ と角速度 ω_1 が満たす関係式を求めなさい。

図 3 に示すように、コマの軸が z 軸と一定の角度 α を保って、コマの軸の上端から見て反時計回りに角速度 ω_2 で高速回転しており、コマの軸の上端が水平面内で円運動をしている場合を考える。この運動は歳差運動と呼ばれる。ただし、コマの軸の下端は、原点 O から動かないとする。コマの重心の座標を (X, Y, Z) とし、重心はコマの軸上で下端から距離 R の位置にあるとする。また、重力加速度の大きさを g とする。

(5) コマの重心に働く重力の原点 O のまわりのモーメントを求めなさい。

(6) コマの角運動量の大きさは、問 (1) の結果で ω_1 を ω_2 に置き換えたものと同じであるとする。また、コマの角運動量の向きは、原点 O から重心の方向であるとする。コマの重心が従う回転の運動方程式を求めなさい。

(7) 問 (6) の結果から、重心の座標 (X, Y, Z) を時刻 t の関数として求めなさい。ただし、重心は $t = 0$ で xz 平面内の $x > 0$ の位置にあったとする。

(8) 重心の回転運動の角速度 Ω を求めなさい。

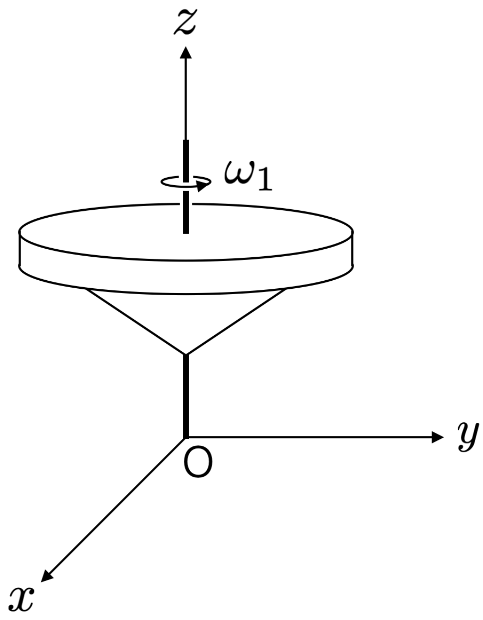

図 2

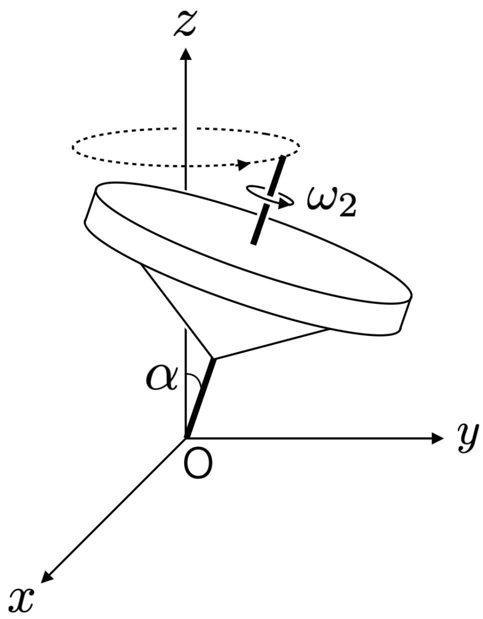

図 3

令和２年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [II] (125 点)　令和元年 8 月 28 日 (水) 14:40 – 16:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと。

(2) 問題冊子はこの表紙を含め 5 枚、解答用紙は 2 枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使って良い。

(5) 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [II]

以下、真空中の誘電率を ε_0、透磁率を μ_0 とする。また、直交座標系 (x, y, z) の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$、極座標系 (r, θ, ϕ) の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\phi$ とする。

[A-I] 真空中で原点から距離 r、z 軸に対する極角 θ にある点 P を考える (図1)。

(1) 原点においた点電荷 q が点 P に作る静電ポテンシャル Φ_0 を r の関数として書け。

(2) 点電荷 q を原点から z 軸正方向に d だけ離れた位置においたとき、この電荷が作る点 P における静電ポテンシャル Φ_1 を r と θ の関数として書け。

(3) $\dfrac{d}{r} \ll 1$ として、差 $\Phi_1 - \Phi_0$ を $\dfrac{d}{r}$ の一次まで展開したもの (Φ_d) を求めよ。

(4) 前問 (3) の結果の Φ_d は、原点におかれた z 軸正方向を向いた大きさ $p = qd$ の電気双極子が作る静電ポテンシャルとみなすことができる。この電気双極子による電場の r 成分 E_r を p, r, θ の関数として求めよ。なお

$$\nabla\Phi = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}$$

を用いてもよい。

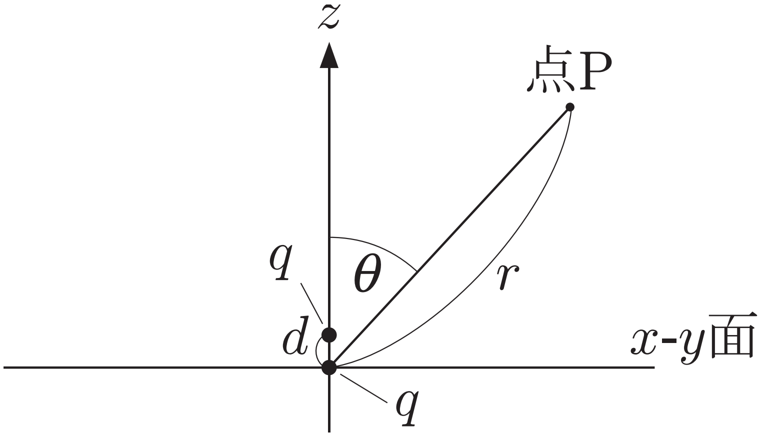

図 1

[A-II] 真空中に z 軸正方向の一様電場 $\boldsymbol{E_0} = E_0\,\boldsymbol{e}_z$ が存在する (図 2)。

(1) この一様電場による、原点から距離 r、z 軸に対する極角 θ にある点 P の静電ポテンシャル Φ_u を r と θ の関数として表せ。ただし、原点において $\Phi_u = 0$ とする。

その後、半径 a の導体球を原点に置いた (図 3)。導体球の総電荷は 0 であるが、外部電場の発生源である無限遠方の正および負の電荷によって導体球の表面に電荷が誘起され、導体球外部の電場もそれに応じて変化した。このときの導体球表面の電荷密度を求めたい。

(2) 導体球外部の静電ポテンシャル Φ は、鏡像の考え方を適用し、導体の代わりに z 軸正方向の電気双極子 p を原点に置いたときの静電ポテンシャル Φ_d を用いて $\Phi = \Phi_u + \Phi_d$ と表すことができる。$r = a$ における Φ の境界条件を考え、p の値を E_0 を用いて表せ。

(3) 導体表面上の電荷密度 σ を表面上の点の θ 座標の関数として求めよ。

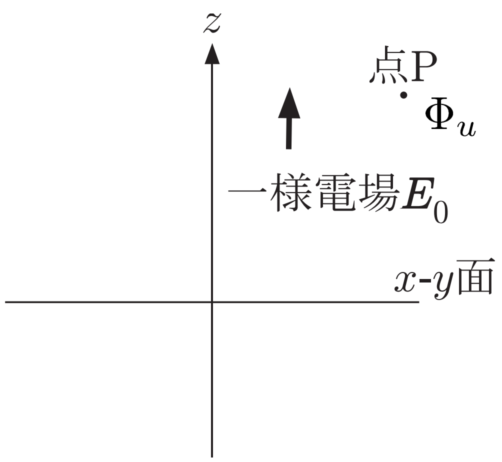

図 2

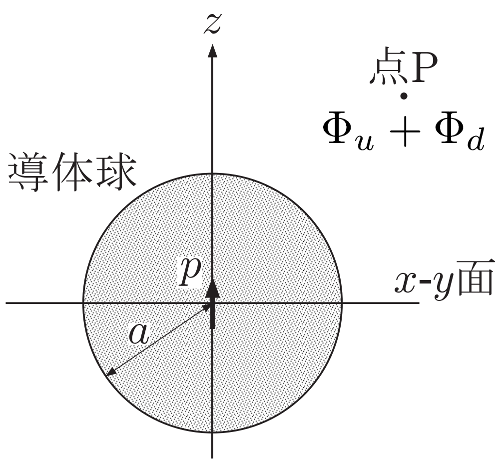

図 3

[B-I] 図 4 のように媒質 I および II を含む狭い領域を考える。境界面は平面とみなせるものとし境界面上に x および y 軸を定義し、領域 I から領域 II への向きを z 軸の正方向とする。また、境界面上に y 軸正方向に流れる面電流があるものとし、その面電流密度を j_y とする。このとき媒質 I および媒質 II の磁場の x 成分 H_x^I および H_x^{II} に関する境界条件

$$H_x^{II}(z=0) - H_x^I(z=0) = j_y$$

を電磁気学の法則により証明せよ。なお、図 4 と同じ解答用紙上の図に書き込みをして、証明に利用してもよい。

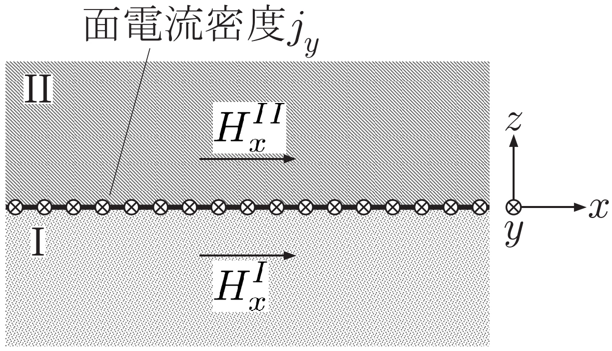

図 4

[B-II] 図 5 のように半径 a の球面上にコイルを巻いたものを真空中に置く。球の中心を原点とし、この球面状コイルは z 軸に対して軸対称であるとする。球内の磁場が z 軸正方向の一様磁場 $\boldsymbol{H}_0 = H_0 \cos\theta\, \boldsymbol{e}_r - H_0 \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\theta$ になるようにしたい。そのためには、場所 (θ) によって巻き数の密度を調節することにより、適切な表面電流密度 $\boldsymbol{j} = j(\theta)\, \boldsymbol{e}_\phi$ を作ればよいが、この $j(\theta)$ がどのような関数になるか検討しよう。球内部を領域 I、外部を領域 II とし、領域 I および II の透磁率は共に μ_0 とする。

電流のない領域 II において磁気スカラー・ポテンシャル Φ_m が定義できる。このとき、磁束密度は $\boldsymbol{B} = -\nabla\Phi_m$ である。

(1) Φ_m がラプラス方程式を満たすことをマクスウェル方程式を利用して示せ。

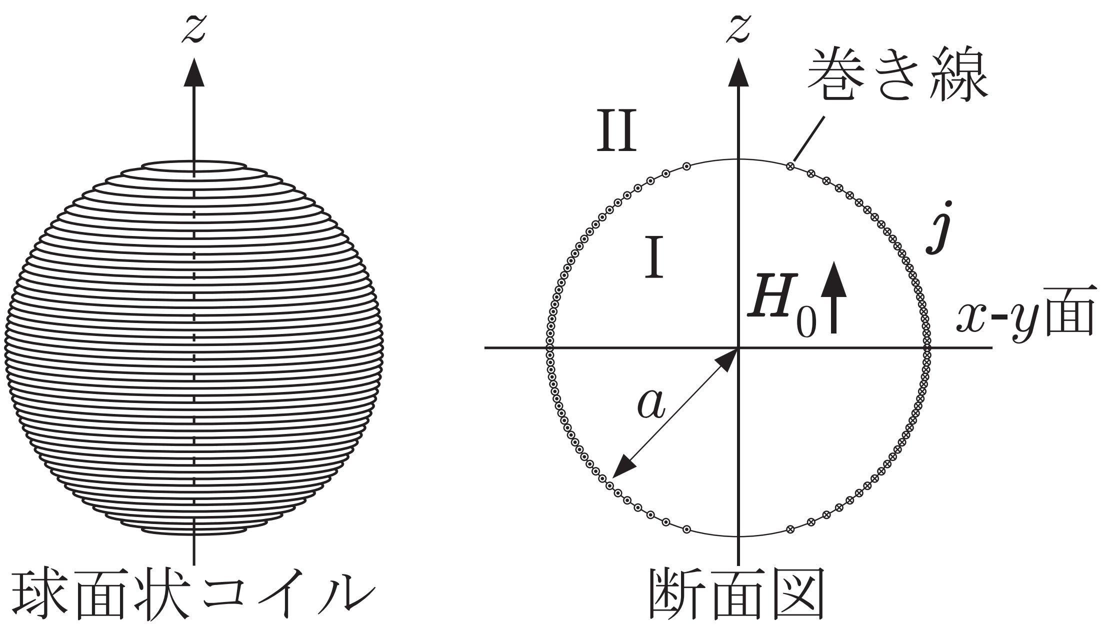

図 5

$\boldsymbol{B}$ の r 成分が領域 I と領域 II の境界で連続であることに注意すると、$r=a$ における内部磁場の r 成分の θ 依存性から $\Phi_m=\mu_0 A\,R(r)\cos\theta$ (A は定数、$R(r)$ は関数) とおける。

(2) この Φ_m をラプラス方程式に代入し、また $R(r)$ が r のべき関数 $R(r)=r^n$ であると仮定し、n を決定せよ。ただし、無限遠での境界条件は $R(\infty)=0$ であるとする。なお

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

を用いてもよい。

(3) $r=a$ での境界条件 $H_r=H_0\cos\theta$ から、定数 A を決定せよ。

(4) $r=a$ における磁場の θ 成分の境界条件 $H_\theta^{II}-H_\theta^{I}=j(\theta)$ を利用して、表面電流密度 $j(\theta)$ を求めよ。

令和２年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [Ⅲ] (125 点)　令和元年 8 月 28 日 (水) 16:20 – 17:40

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと。

(2) 問題冊子はこの表紙を含め 5 枚、解答用紙は 2 枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使って良い。

(5) 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [III]

[A] ハミルトニアン H_1 が、次の式で与えられる1次元の調和振動子を考える。

$$H_1 = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$$

ここで、m, ω は振動子の質量と角振動数である。$\hat{x}, \hat{p}$ は、それぞれ、座標、運動量を表す演算子であり、$\hat{p} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ で表され、演算子間に成り立つ正準交換関係は次のように与えられる。

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar, \quad [\hat{x}, \hat{x}] = 0, \quad [\hat{p}, \hat{p}] = 0$$

ここで、$\hbar$ は換算プランク定数であり、$\hbar = h/2\pi$ (h はプランク定数) とする。また、演算子 $\hat{a}^\dagger, \hat{a}, \hat{N}$ を下記の通り定義する。

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \quad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \quad \hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

演算子 $\hat{N}$ の固有値を n、その固有値によって区別される固有状態を $|n\rangle$ とする。

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

この時、以下の問いに答えよ。

(1) 交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$, $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ を示せ。また、ハミルトニアン H_1 を $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ を用いて表わせ。

(2) $\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle$、および $\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle$ を示せ。

(3) 演算子 $\hat{N}$ の固有値 n が非負であること、および整数であることを示せ。

(4) $\langle n|\hat{x}^2|n\rangle$、および $\langle n|\hat{p}^2|n\rangle$ を計算し、それらの積 $\langle n|\hat{x}^2|n\rangle\langle n|\hat{p}^2|n\rangle$ を求めよ。ここで、$\langle m|n\rangle$ は下記の通り与えられる。

$$\langle m|n\rangle = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

以下の設問では、質量が m で等しい 2 つの独立した調和振動子を考える。2 つの振動子をプラス型、マイナス型とし、それぞれの角振動数を $\omega_\pm$ としたとき、ハミルトニアン H_2 は下記の通り与えられる。

$$H_2 = \frac{1}{2m}\,\hat{p}_+^2 + \frac{1}{2m}\,\hat{p}_-^2 + \frac{m\omega_+^2}{2}\,\hat{x}_+^2 + \frac{m\omega_-^2}{2}\,\hat{x}_-^2 \tag{1}$$

ここで、$\hat{x}_\pm, \hat{p}_\pm$ は、それぞれ、プラス型、マイナス型の振動子に対する座標、運動量を表す演算子である。

(5) $\omega_+ = \omega,\ \omega_- = 2\omega$ のときのエネルギー固有値を、プラス型、マイナス型のエネルギー固有値に対応する非負の整数 n_+, n_- を用いて表現せよ。また、基底状態から第 3 励起状態までのエネルギー固有値とその縮退度を求めよ。

プラス型振動子に対して $\hat{a}_+^\dagger, \hat{a}_+$、マイナス型振動子に対して $\hat{a}_-^\dagger, \hat{a}_-$ の演算子を考える。同じ型の振動子の間には 1 次元の調和振動子で示した交換関係が成り立つとし、異なる型の振動子から取った一対の演算子は常に交換すると仮定する。

$$[\hat{a}_+, \hat{a}_-^\dagger] = [\hat{a}_-, \hat{a}_+^\dagger] = 0$$

下記の通り 3 つの演算子を定義する。

$$\hat{J}_+ = \hbar\,\hat{a}_+^\dagger\,\hat{a}_-, \qquad \hat{J}_- = \hbar\,\hat{a}_-^\dagger\,\hat{a}_+, \qquad \hat{J}_z = \frac{\hbar}{2}(\hat{a}_+^\dagger\,\hat{a}_+ - \hat{a}_-^\dagger\,\hat{a}_-)$$

(6) 交換関係 $[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hbar\hat{J}_z$ を示せ。

(7) 演算子 $\hat{N}_+ = \hat{a}_+^\dagger\,\hat{a}_+,\ \hat{N}_- = \hat{a}_-^\dagger\,\hat{a}_-$ を用いて、$\hat{N} = \hat{N}_+ + \hat{N}_-$ としたとき、

$$\hat{J}^2 \equiv \hat{J}_z^2 + \frac{1}{2}\,(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+)$$

を、$\hbar$ と $\hat{N}$ を用いて表せ。

[B] 二準位系の量子力学について考える。ハミルトニアン H_0 の行列表示が以下で表されるとし、

$$H_0(\lambda) = \begin{pmatrix} k\lambda & 0 \\ 0 & -k\lambda \end{pmatrix}$$

この系の 2 つの独立した量子状態を表す波動関数 ψ_1, ψ_2 を以下のベクトルに対応させる。

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで k は正の実数、λ は実数のパラメータとする。

(1) H_0 の固有状態 ψ_1, ψ_2 に対応するエネルギー固有値 E_1, E_2 を求めよ。また、固有値 E_1, E_2 を $-1 < \lambda < 1$ の範囲内で λ の関数としてグラフに描け。

次に、上記のハミルトニアンに、以下の行列表示で与えられる項 H_p を加えることを考える。

$$H_p = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c^* & 0 \end{pmatrix}$$

ここで、c は任意の複素数である。

(2) H_0 に H_p を加えたときのエネルギー固有値 E_1', E_2' を求めよ。ただし、$E_1' < E_2'$ の関係が成り立つように定義せよ。また、固有値 E_1', E_2' を $-1 < \lambda < 1$ の範囲内で λ の関数としてグラフに描け。ここで、グラフは、(1) で描いたものに、区別がつくようにして描き加えること。

H_p を加える前と加えた後のエネルギー間隔を、それぞれ、$\delta E_u \equiv E_2 - E_1$ と $\delta E_p \equiv E_2' - E_1'$ とする。また、導入する c と δE_u の比を r、すなわち、$r \equiv \delta E_u / c$ と定義する。ただし、以下では $\lambda > 0$ とする。

(3) H_p を加える前後のエネルギー間隔の比 $\delta E_p / \delta E_u$ を、r のみを用いて表せ。

(4) H_p を加えた後の波動関数 ψ_1', ψ_2' は、以下のように、H_p を加える前の波動関数 ψ_1, ψ_2 の線形結合で表すことができる。

$$\begin{aligned}\psi_1' &= \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \\ \psi_2' &= -\beta^*\psi_1 + \alpha^*\psi_2\end{aligned}$$

規格化条件 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を使って、$|\alpha|, |\beta|$ を、 r のみを用いて表せ。

令和 2 年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [IV] (125 点)　令和元年 8 月 29 日 (木) 09:00 – 10:20

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと。

(2) 問題冊子はこの表紙を含め 6 枚、解答用紙は 3 枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使って良い。

(5) 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [IV]

全問を通じてボルツマン定数を k_B と表記する。気体定数 R は、アボガドロ数を N_A として $R = N_A k_B$ である。プランク定数は、h と表記せよ。以下では、log は自然対数を意味する。

[A] この大問 [A] では、重力の影響は無視できることを仮定する。

(1) 準静的断熱過程で体積 V が変化する過程を熱力学を用いて考える。準静的断熱過程における内部エネルギー U の微小変化量 dU と体積の微小変化量 dV の間の関係を書き下せ。圧力は P とする。

(2) 単原子分子からなる理想気体の準静的断熱過程で $PV^{5/3}$ が一定であることを示せ (Poisson の式)。ただし、単原子分子理想気体では、内部エネルギーを U とし圧力が、$P = 2U/(3V)$ となることは用いて良い。

(3) n モルの単原子分子理想気体で、図 1 のような等温過程 $A \to B$（温度 T_1）、断熱過程 $B \to C$、等温過程 $C \to D$（温度 T_2）、断熱過程 $D \to A$ を組み合わせた準静的サイクル (Carnot サイクル）を考える。状態 i ($i = A, B, C, D$) での体積を V_i と表記する。

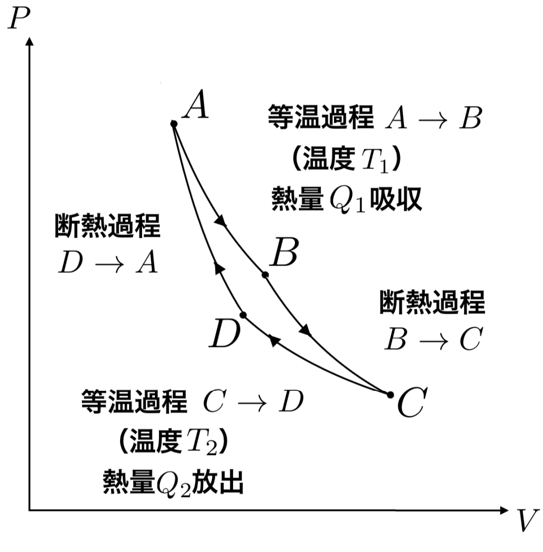

図 1

この時、気体が等温過程 $A \to B$ で吸収した熱量 Q_1 および、$C \to D$ で外に放出した熱量 Q_2 を求めよ。

ただし、理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ は用いて良い。（この状態方程式および上記の圧力と内部エネルギーの関係 $P = 2U/(3V)$ から、理想気体の内部エネルギーは温度のみに依存することがわかる。）

(4) (2) の結果から、単原子分子理想気体の準静的断熱過程で $TV^{2/3}$ が一定であることを説明せよ。これを用いて、(3) で求めた熱量 Q_1 と熱量 Q_2 が $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$ の関係を満たすことを示せ。

[B]

図 2 に示すような N 個の折れ曲がらない長さ a の要素が繋がった 1 次元的な鎖を考える。(x 軸を図 2 に示すように定義する。)鎖の関節は自由に折れ曲がり、各要素は、右向き($+$ 方向)か左向き($-$ 方向)かを向くことができるとする。あらゆる配置は同じ内部エネルギーを持つとする。

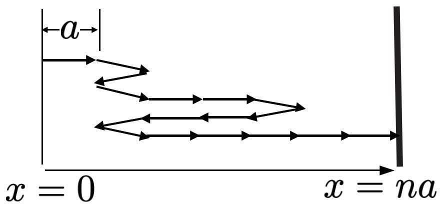

図 2

(1) 一般の N に対して考える前に、小さな N に対して、与えられた $x = na$ に対応する折れ曲がり方の総数を数えてみよう。

例として $N = 7$ の場合を考え、$n = 3$ として $x = 3a$ となるような折れ曲がり方の総数を数える。下の図 3 の 3 つの折れ曲がり方はその例である。一番下の場合のように鎖の途中の部分が両端 $x = 0$ と $x = na$ の間からはみ出てもいいとする。

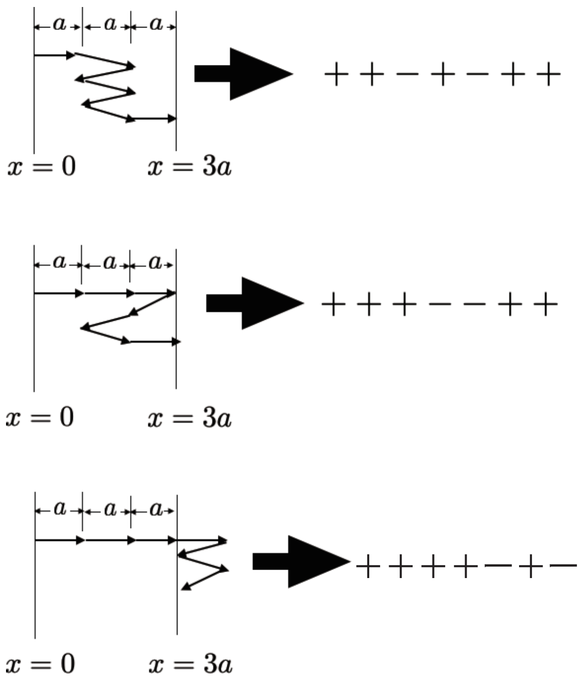

図 3

図 3 に対応を示すように、鎖の折れ曲がり方を定めるには、左端からはじめて、各々の要素が $+$ 方向か $-$ 方向かを定めればよい。こうすると $x=3a$ となるためには、7 個の要素のうち、$+$ 方向を向いた要素が 5 個, $-$ 方向を向いた要素が 2 個存在していればよいことがわかる。このような考え方により、$N=7$ で $x=3a$ となる鎖の折れ曲がり方の総数を求めよ。

(2) 一般の N に対して、$x=na$ となるような鎖の折れ曲がり方の総数 $W(x)$ を求めよ。ただし、N と n の偶奇性は同じとする (N と n が共に偶数の場合、あるいは、共に奇数の場合を考える)。

(3) ミクロカノニカル集団としてこの系を扱う。この大問で以後、$N-|(x/a)| \gg 1$ とする。ボルツマンの公式 $S(x)=k_B \log W(x)$ を用い、 $x=na$ の関数としてエントロピー S が、以下のように与えられることを示せ。

$$S(x) \approx Nk_B \left\{ \log 2 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{Na}\right)\log\left(1+\frac{x}{Na}\right) - \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{Na}\right)\log\left(1-\frac{x}{Na}\right) \right\}$$

ただし、十分大きな自然数 M に対して成り立つスターリングの公式 $\log(M!) \approx M\log M - M$ を用いてよい。

(4) 内部エネルギーは、x に依らないので、自由エネルギーは定数を除いて、$F=-TS(x)$ となる（ここで温度を T とした）。N は非常に大きいので、x は、連続変数として扱って良い。張力

$$X=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_T$$

を計算せよ。 さらに、$|x/(Na)| \ll 1$ の場合に、$x/(Na)$ に関して 1 次までで張力 X を展開せよ。

[C]

三次元空間において、内部自由度の無視できる N 個の単原子分子が鉛直に置かれた底面積 A の無限に高い筒状容器に入れられているとする。単原子分子 1 個の質量は m で、一様な重力場が作用しているとし、粒子間相互作用は存在しないとする。系は温度 T の熱平衡状態であるとし、古典理想気体のカノニカル集団として取り扱う。重力加速度の大きさを g とする。また、筒状容器の底を重力ポテンシャルの原点とする。ただし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を用いて良い。

(1)$N = 1$ の場合に、この系の分配関数 Z_1 が、

$$Z_1 = A\frac{k_B T}{mg}\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2}$$

であることを示せ。

(2) 以後、この大問では一般の $N(\gg 1)$ の場合を考える。分配関数 Z_N、ヘルムホルツの自由エネルギー $F = -k_B T \log Z_N$ を計算せよ。十分大きな自然数 M に対して成り立つスターリングの公式 $\log(M!) \approx M \log M - M$ を用いてよい。

(3) 内部エネルギー U、および、熱容量 dU/dT を計算せよ。

(4) (3) で求めた熱容量と、重力を無視した場合の単原子理想気体の定積熱容量

$$C_V = \frac{3Nk_B}{2}$$

との違いについて物理的な意味を述べよ。