平成27年度大学院修士課程入学試験問題

物理学[Ⅰ]　(125点)　平成26年8月27日(水)　13:00-14:20

注意事項

(1)試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと。

(2)問題冊子はこの表紙を含め3枚、解答用紙は2枚である。

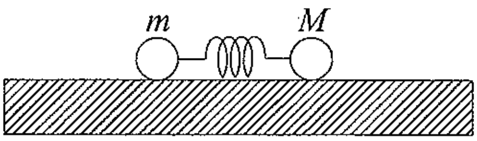
(3)すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4)大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使って良い。

(5)問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [I]

[A] 右図のようなバネ（バネ定数 k, 自然長 l）の両端に質量が m と M の物体を接続した系の運動を考える。運動は一次元であり、バネの質量や床との摩擦は無視できるとして、以下の問いに答えよ。



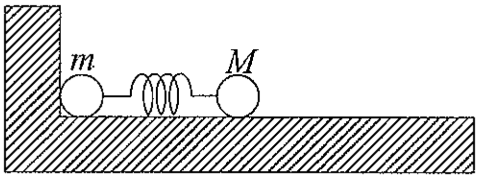
1) 連結系の重心座標を X, 相対座標を x としたとき、質量 m の質点座標 x_1 と質量 M の質点座標 x_2 を X と x を用いて表せ。ここで x は、$x_2 - x_1$ で定義する。

2) 重心座標 X と相対座標 x を用いて、この系のラグランジアンを求めよ。

3) 前問の解答を用いて、X および x についての運動方程式を導出せよ。

4) 2つの物体の間隔を $l+a$ だけ離し(ここで $a>0$)、$t=0$ で $X=X_0$ の位置から静かに放したときの、X と x の時間変化を求めよ。

5) 右図のように、連結系の左側を壁に押し付けて、物体の間隔を $l-a$ とし、$t=0$ で静かに放したときの、X と x の時間変化を求めよ。ここで、$t=0$ で $x_1=0$ とする。



[B] 曲線上に束縛された質点の運動に関して、以下の問いに答えよ。

1) 下図のように、半径 a の円環上の一点 P を水平な天板に接触させた後、天板に沿って円環を転がした際に生じる点 P の軌跡について考える。

1-a) 点 P の x, y 座標を、ϕ の関数として求めよ。ここで、ϕ は円環の回転角 $(0 \leqq \phi \leqq 2\pi)$ で、点 P が天板と最初に接した位置 S $(\phi = 0)$ を原点とする。

1-b) 回転角 ϕ における点 P の移動距離 q（曲線 SP の長さ）が、以下の式で与えられることを示せ。

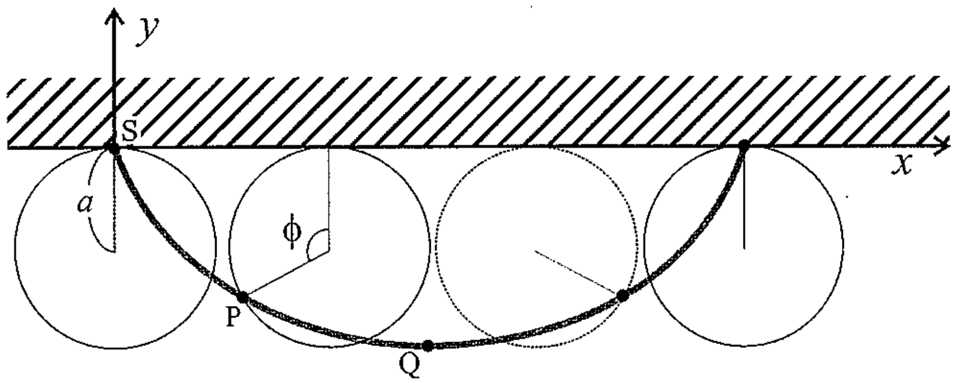
$$q = 4a\left(1 - \cos\frac{\phi}{2}\right)$$

2) 次に、問 1-a) で得られた曲線と同一形状のレール上に置かれた質量 m の質点の運動について考える。ここで、重力は $-y$ 方向に作用し、重力加速度の大きさを g とする。また、質点が受ける空気抵抗、およびレールとの間の摩擦力は無視できるとする。

2-a) 質点のラグランジアンを前問で求めた曲線の長さ q を用いて表せ。

2-b) ラグランジュの運動方程式を導出し、$t = 0$ で質点が点 S に静かに置かれたときの q の時間変化を求めよ。

2-c) 質点が曲線上の最低点以外のどの位置に静かに置かれても、質点が最初に最低点 Q に到達する時間が等しくなることを示せ。また、その時間を求めよ。



平成27年度大学院修士課程入学試験問題

物理学 [II] （125 点） 平成 26 年 8 月 27 日（水） 14 : 40 ～ 16 : 00

注意事項

1. 試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含め 5 枚、解答用紙は 4 枚である。
3. 全ての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使って良い。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [II] 単位系はSI（MKSA）系を用いること。仮に、cgs系で解答する場合には、そのことを明示しなさい。

[A] 真空中の静電場について考える。位置 $\boldsymbol{r}$ における電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ と電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の関係はガウスの法則の微分形

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

によって与えられ、電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ と電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ の関係はポアッソン方程式

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

によって与えられる。ここで、ε_0 は真空の誘電率を表し、ラプラシアン Δ は次式で定義されている。

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

以下の各問いに答えよ。

1) ガウスの法則の微分形 (1) からポアッソン方程式 (2) を導出せよ。
2) 任意の閉曲面 $\partial\Omega$ を考え、その内部領域を Ω とする。ガウスの法則の微分形 (1) を領域 Ω で体積積分することによって、ガウスの法則の積分形を求めよ。このとき、Ω の体積要素を dV とし、$\partial\Omega$ 上の面素 $d\sigma$ の法線方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とせよ。$\boldsymbol{n}$ の向きは Ω の内から外への向きである。
3) 中心が原点にある半径 a の球の内部に電荷が球対称に分布しており、その総量を Q とする。以下の問いに答えよ。
   (a) 電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の方向は $\boldsymbol{r}$ に平行で、その大きさは $r \equiv |\boldsymbol{r}|$ のみの関数となる。このことを、電荷分布の対称性を用いて説明せよ。
   (b) ガウスの法則を用いて、$r > a$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の大きさを求めよ。

4) 三次元のデルタ関数を $\delta(\boldsymbol{r})$ として、公式

$$\Delta \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{3}$$

が成り立つ。このことを以下の手順で示せ。

(a) $\boldsymbol{r} \neq 0$ で、式 (3) の両辺が一致することを示せ。

(b) 中心が原点にある半径 b の球の内部領域 Ω_b で式 (3) の両辺を体積積分し、両辺が一致することを示せ。

5) ポアッソン方程式 (2) の解は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega dV' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4}$$

となる。このことを以下の手順で確認せよ。ここで、dV' は位置 $\boldsymbol{r}'$ における微小体積を表しており、体積積分の領域 Ω は全空間とする。

(a) 式 (3) を用いて、公式

$$\Delta \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{5}$$

が成り立つことを説明せよ。

(b) 式 (5) を用いて、式 (4) で与えられる $\phi(\boldsymbol{r})$ がポアッソン方程式 (2) を満たすことを示せ。

[B] 上半空間（$z > 0$）が誘電率 ε_0, 透磁率 μ_0 の真空で、下半空間（$z < 0$）が誘電率 ε, 透磁率 μ の絶縁体で満たされている。ここで、真電荷は分布していないものとする。

まず、時刻 t, 位置 $\boldsymbol{r}$ での電場を $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ とし、電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ が絶縁体の表面（$z = 0$）で満たすべき境界条件について考える。

1) 図１の左図のように、境界面に平行な底面を持った底面積 S、厚さ $2d$ の円筒形の閉曲面を考える。ここで、S および d は任意にとれる。この閉曲面に対して電束密度 $\boldsymbol{D}$ に対するガウスの法則を適用し、電場の z 成分 E_z に対する境界条件が

$$\varepsilon_0 E_z(\boldsymbol{r}, t)\Big|_{z=+0} = \varepsilon E_z(\boldsymbol{r}, t)\Big|_{z=-0}$$

となることを示せ。ここで、$z = +0$ は境界面直上を、$z = -0$ は直下を意味する。

2) ファラデーの法則の積分形

$$\oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma \tag{6}$$

を用いて、電場の x 成分 E_x に対する境界条件を下記の手順で求めよ。

(a) Σ, $\partial\Sigma$, $\boldsymbol{n}$, $d\sigma$, $d\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{B}$ がそれぞれ何を表すかを明示しつつ、式 (6) の両辺の意味を説明せよ。特に、ベクトル $\boldsymbol{n}$ と $d\boldsymbol{s}$ の向きの関係について述べよ。

(b) 図１の右図のように、x–z 平面に平行な平面内に辺の長さが ℓ および $2a$ の長方形を考える。ここで、ℓ および a は任意にとれる。この面に対してファラデーの法則を適用し、E_x に対して下記の境界条件が成立することを示せ。

$$E_x(\boldsymbol{r}, t)\Big|_{z=+0} = E_x(\boldsymbol{r}, t)\Big|_{z=-0}$$

なお、電場の y 成分 E_y に対しても同様に、下記の境界条件が成り立つ。

$$E_y(\boldsymbol{r}, t)\Big|_{z=+0} = E_y(\boldsymbol{r}, t)\Big|_{z=-0}$$

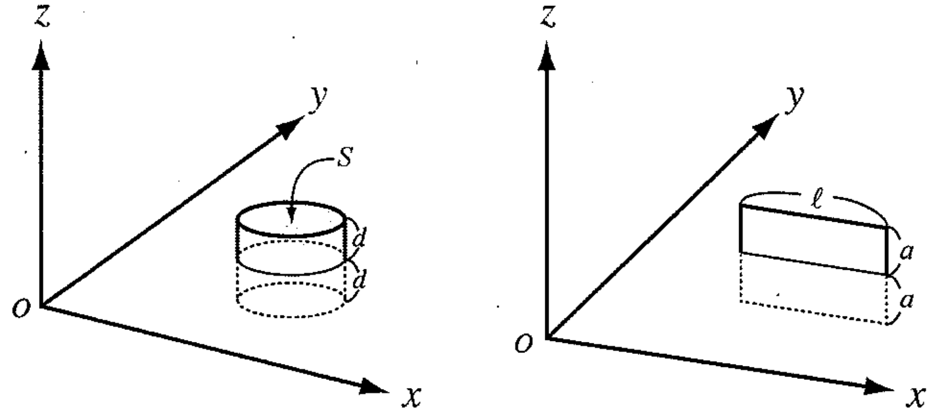


図１

次に、図2の左図のように、電磁波が真空から絶縁体へ入射し、$z=0$ の境界面で反射波と透過波が生じたとする。入射波、反射波、透過波の電場をそれぞれ $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{E}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r},t)$ とし、下記のように平面波で表す。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{E}_0^{\mathrm{I}} \exp(i\boldsymbol{k}^{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega^{\mathrm{I}}t), \qquad (z>0)\\
\boldsymbol{E}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{E}_0^{\mathrm{R}} \exp(i\boldsymbol{k}^{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega^{\mathrm{R}}t), \qquad (z>0)\\
\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{E}_0^{\mathrm{T}} \exp(i\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega^{\mathrm{T}}t) \qquad (z<0)
\end{aligned}
$$

ここで、$\boldsymbol{E}_0$ は定数ベクトル、$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトル、ω は周波数を表し、上添え字 I, R, T はそれぞれ入射波、反射波、透過波の量を意味する。

3) これまでに求めた境界条件を用いて、$\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{E}^{\mathrm{R}}$, $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}$ の z 成分が境界面上で満たす関係式を具体的に記述せよ。ここで、定数ベクトル $\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{E}_0^{\mathrm{R}}, \boldsymbol{E}_0^{\mathrm{T}}$ の z 成分をそれぞれ $E_{0z}^{\mathrm{I}}, E_{0z}^{\mathrm{R}}, E_{0z}^{\mathrm{T}}$ とせよ。

4) 問3）で求めた関係式を用いて、以下の2点を説明せよ。

   (a) $\omega^{\mathrm{I}}=\omega^{\mathrm{R}}=\omega^{\mathrm{T}}$

   (b) 波数ベクトル $\boldsymbol{k}^{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{k}^{\mathrm{R}}$, $\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}$ は x–y 平面に垂直な同一平面内にある。

5) 図2の右図のように $\boldsymbol{k}^{\mathrm{I}}$ と $\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}$ が作る面を x–z 平面として、電磁波の入射角 θ^{I} と屈折角 θ^{T} の関係を、電磁波の真空中での速さ c と絶縁体中での速さ v を用いて求めよ。

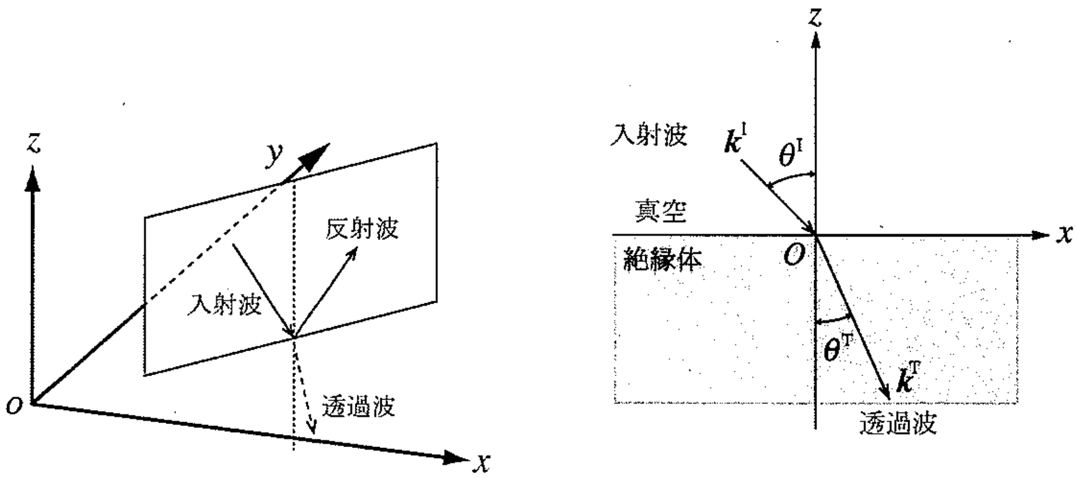


図2　上半空間（$z>0$）が真空で、下半空間（$z<0$）が絶縁体である。左図の長方形は波数ベクトル $\boldsymbol{k}^{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{k}^{\mathrm{R}}$, $\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}$ がつくる平面を表しており、x–y 平面に垂直である。右図で、y 軸は紙面に対して奥向きである。

平成27年度大学院修士課程入学試験問題

物理学[Ⅲ]　(125点)　平成26年8月27日(水)　16:20-17:40

注意事項

(1)試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと。

(2)問題冊子はこの表紙を含め4枚、解答用紙は3枚である。

(3)すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4)大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使って良い。

(5)問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [III]

以下の問いで、i は虚数単位、m は粒子の質量、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものを表している。

[A] 一次元の Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}+V(x)\phi(x)=E\phi(x) \tag{1}$$

を考える。ここで、ポテンシャル $V(x)$、エネルギー E はそれぞれ実数である。固有関数 $\phi(x)$ は束縛状態を表している。エネルギー $E=E_1$ に対する固有関数を $\phi_1(x)$、$E=E_2$ に対する固有関数を $\phi_2(x)$ とし、ロンスキアン関数

$$W(x)=\phi_1(x)\frac{d\phi_2(x)}{dx}-\frac{d\phi_1(x)}{dx}\phi_2(x) \tag{2}$$

を定義すると、

$$\frac{dW}{dx}=\frac{2m}{\hbar^2}(E_1-E_2)\phi_1(x)\phi_2(x) \tag{3}$$

が成り立つ。

1) 式 (1), (2) から、式 (3) を導出せよ。

2) 式 (3) を用いて、一次元の束縛状態が縮退しないことを証明せよ。

3) 一次元の束縛状態 $\phi(x)$ が、一般に、実関数と位相因子 $\exp[i\theta]$ の積で表せることを以下の手順で証明せよ。ここで、θ は実定数である。

   3-a) 問 2) の結果を用いて、$\phi(x)$ とその複素共役 $\phi(x)^*$ の間に $\phi(x)^*=C\phi(x)$ の関係があることを示せ。ここで、C は複素定数である。

   3-b) 問 3-a) の結果を用いて C が一般に $\exp[-2i\theta]$ と表せることを示し、$\phi(x)\exp[-i\theta]$ が実関数であることを示せ。

[B] 三次元系のハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}) \tag{4}$$

を考える。ここで、$\hat{\boldsymbol{p}}$ は運動量演算子を表している。また、$V(\boldsymbol{r})$ は実数ポテンシャルを表し、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の関数である。この $\hat{H}$ の固有値は可算無限個あるとし、n 番目の固有値を E_n、規格化された固有関数（束縛状態）を $\phi_n(\boldsymbol{r})$ とする。$n = 0$ は基底状態を、$n > 0$ は下から n 番目の励起状態を表している。縮退はないとし、$n \neq \ell$ の時、ϕ_n と ϕ_ℓ は互いに直交している。任意の規格化された関数 $g(\boldsymbol{r})$ に対して $\hat{H}$ の期待値 $\langle g|\hat{H}|g\rangle$ を計算すると、

$$\langle g|\hat{H}|g\rangle \geq E_0 \tag{5}$$

となる。この時、等式は $g(\boldsymbol{r}) = \phi_0(\boldsymbol{r})$ の時に成り立つ。

1) 式 (5) を証明しなさい。

2) ポテンシャルとして、$V(r) = V_0 r^\alpha$ を考える。ここで、$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ であり、V_0 は正の定数を、α は正の整数を表している。基底状態 $\phi_0(\boldsymbol{r})$ による運動エネルギー演算子 $\hat{K} = \hat{\boldsymbol{p}}^2/(2m)$ とポテンシャル V の期待値 $\langle 0|\hat{K}|0\rangle$, $\langle 0|V|0\rangle$ の間には、

$$\langle 0|\hat{K}|0\rangle = D\langle 0|V|0\rangle$$

の関係がある。このとき、定数 D は α を用いて表される。以下の手順に従って、定数 D を求めよ。

2-a) 正の定数 λ を導入し、規格化された関数 $f(\boldsymbol{r}) = N\phi_0(\lambda\boldsymbol{r})$ を考える。規格化定数 N が $N = \lambda^{3/2}$ と表せることを示せ。

2-b) 問 2-a) で導入した関数 $f(\boldsymbol{r})$ による $\hat{H}$ の期待値 $\langle f|\hat{H}|f\rangle$ を、λ と $\langle 0|\hat{K}|0\rangle$, $\langle 0|V|0\rangle$ を用いて表せ。ここで、必要に応じて、D 以外の定数を使ってよい。

2-c) 問 2-b) で求めた期待値 $\langle f|\hat{H}|f\rangle$ は λ の関数である。この関数に式 (5) の性質を適用することによって、定数 D を求めよ。

[C] ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ で与えられる磁場 $\boldsymbol{B}$ 中の電荷 q の粒子の運動は、ハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\boldsymbol{p}} - q\boldsymbol{A})^2}{2m} \tag{6}$$

によって量子力学的に記述される。ここで、$\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ は運動量演算子を表している。ベクトルポテンシャルが $\boldsymbol{A} = (0, xB_0, 0)$ と与えられる場合を考え、以下の問いに答えよ。ここで、B_0 は正の定数とし、q も正の電荷とせよ。

1) 交換関係 $[\hat{H}, \hat{p}_x]$, $[\hat{H}, \hat{p}_y]$, $[\hat{H}, \hat{p}_z]$ を求めよ。

2) 問 1) の結果を用いて、$\hat{H}$ の固有状態 $\psi(x, y, z)$ が

$$\psi(x, y, z) = g(x)\exp[ik_y y + ik_z z] \tag{7}$$

と書けることを説明せよ。ここで、$g(x)$ は x の未知関数であり、k_y と k_z は定数である。

3) $k_z = 0$ として、以下の問いに答えよ。

3-a) Schrödinger 方程式 $\hat{H}\psi = E\psi$ を用いて、$g(x)$ に対する方程式を求めよ。ここで、定数 E は粒子のエネルギーを表している。

3-b) 問 3-a) で求めた方程式に対して変数変換を行うことによって、$\hat{H}$ の固有値と固有関数を求めよ。この時、一次元の調和振動子に対するハミルトニアン

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

の固有関数 $\phi_n(x)$ と固有値は既知としてよい。すなわち、関係式

$$\hat{H}_0\phi_n(x) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\phi_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

を用いてよい。ここで、ω は角振動数である。

3-c) 問 3-b) の結果を用いて、$\hat{H}$ の各固有値における縮退度を求めよ。

平成27年度大学院修士課程入学試験問題

物理学［IV］　(125点)　平成26年8月28日(木)　9:00-10:20

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと。

(2) 問題冊子はこの表紙を含め5枚、解答用紙は4枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使って良い。

(5) 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [IV]

以下において、温度を T、ボルツマン定数を k_{B} とし、$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ とする。また、プランク定数を h とし、$\hbar = h/2\pi$ とする。必要に応じて、ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha x^2\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (\alpha > 0)$$

を用いて良い。

[A] N 個の区別できる 1 次元調和振動子からなる系を考える。調和振動子間の相互作用は弱く、系は温度 T の熱浴に接しているとして、以下の問いに答えなさい。

まず、古典力学に従う系を考える。i 番目の調和振動子の位置を x_i、運動量を p_i として、系のエネルギーはハミルトニアン

$$\mathscr{H} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2m} {p_i}^2 + \frac{m\omega^2}{2} {x_i}^2 \right)$$

で与えられるとする。ここで、m は調和振動子の質量、ω は角振動数である。

(1) 分配関数 Z_1 が次式で表されることを示しなさい。

$$Z_1 = (\beta\hbar\omega)^{-N}$$

(2) ヘルムホルツの自由エネルギー F_1 を求めなさい。

(3) エントロピー S_1 を求めなさい。

(4) 内部エネルギー E_1 を求めなさい。

(5) 熱容量 $C_1 = (\partial E_1/\partial T)_N$ を求めなさい。

次に、量子力学に従う系を考える。i 番目の調和振動子が量子状態 n_i にあるときのエネルギー準位は

$$E_{n_i} = \hbar\omega\left(n_i + \frac{1}{2}\right) \qquad (n_i = 0, 1, 2, \cdots)$$

で与えられる。ここで、ω は角振動数である。全系のエネルギーは

$$E_{n_1, n_2, \cdots, n_N} = \sum_{i=1}^{N} E_{n_i}$$

で与えられるとする。

(6) 分配関数 Z_2 が次式で表されることを示しなさい。

$$Z_2 = \left(2\sinh\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)^{-N}$$

(7) 熱容量 C_2 を求めなさい。

(8) 温度 T が十分高いとき、$\beta\hbar\omega \ll 1$ として、熱容量 C_2 が熱容量 C_1 と一致することを示しなさい。

(9) 温度 T が十分低いとき、$\beta\hbar\omega \gg 1$ として、熱容量 C_2 を求めなさい。

(10) 熱容量 C_2 を温度 T の関数としてグラフに描きなさい。

[B] リング上に並んだ相互作用する N 個のイジングスピンからなる、1次元スピン系を考える。系のエネルギーはハミルトニアン

$$\mathscr{H} = -J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} - \mu H\sum_{i=1}^{N}\sigma_i$$

で与えられるとする。ここで、スピン変数 σ_i は ± 1 の値をとり、周期的境界条件 $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ を満たす。J は相互作用の強さ、μ は磁気モーメントの大きさ、H は外部磁場の強さである。また、二つの変数 K, η を $K = \beta J, \eta = \beta\mu H$ と定義する。系は温度 T の熱浴に接しているとして、以下の問いに答えなさい。

[1] スピン間相互作用がない場合 $(J = 0)$ を考える。

(1) 分配関数 Z_0 を求めなさい。

(2) ヘルムホルツの自由エネルギー F_0 を求めなさい。

(3) 磁化 $M_0 = -\left(\partial F_0/\partial H\right)_T$ を求めなさい。

[2] スピン間相互作用がある場合 $(J \neq 0)$ を考える。まず、スピン変数 σ_i と σ_{i+1} の関数 $T_1(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ を

$$T_1(\sigma_i, \sigma_{i+1}) = \exp\left[K\sigma_i\sigma_{i+1} + \frac{1}{2}\eta\left(\sigma_i + \sigma_{i+1}\right)\right]$$

と定義する。

(4) 分配関数 Z が関数 $T_1(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ を用いて、

$$Z = \sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1} T_1(\sigma_1,\sigma_2)\,T_1(\sigma_2,\sigma_3)\cdots T_1(\sigma_N,\sigma_1)$$

と表されることを示しなさい。

次に、関数 $T_1(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ を用いて 2 行 2 列の行列 $\hat{T}_1$ を

$$\hat{T}_1 = \begin{pmatrix} T_1(+1,+1) & T_1(+1,-1) \\ T_1(-1,+1) & T_1(-1,-1) \end{pmatrix}$$

と定義し、さらに 2 行 2 列の行列 $\hat{T}_N$ を $\hat{T}_N = \hat{T}_1{}^N$ と定義する。

(5) 分配関数 Z が行列 $\hat{T}_N$ を用いて、

$$Z = \mathrm{Tr}\,[\,\hat{T}_N\,]$$

と表されることを示しなさい。ただし、Tr は行列の対角和 (トレース) を表す。

(6) 分配関数 Z が行列 $\hat{T}_1$ の固有値 $\lambda_\pm$ を用いて、

$$Z = \lambda_+{}^N + \lambda_-{}^N$$

と表されることを示しなさい。ここで、$\lambda_\pm = e^K \left(\cosh\eta \pm \sqrt{\sinh^2\eta + e^{-4K}} \right)$ である。

(7) ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めなさい。ただし、$N \gg 1$ として、F が示量変数となるよう、すなわち、N に比例するように近似しなさい。

(8) 磁化 M を求めなさい。