平成28年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学[Ｉ] (125点) 平成27年8月25日(火) 13:00-14:20

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと。

(2) 問題用紙はこの表紙を含め４枚、解答用紙は２枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使って良い。

(5) 問題用紙は持ち帰ること。

物理学 [I]

[I-A] 図 1 のように、半径 a、質量 M の密度が一様な球を水平に投げて、床ではね返る運動を考える。水平方向を x 軸 (初速の向きを正)、垂直方向を y 軸 (上向きを正) とし、球の重心は xy 平面内を運動するものとする。また球は重心を通り xy 平面に垂直な軸のまわりにのみ回転するものとし、x 軸から y 軸への回転の向きを正とする。水平に投げたときの球の速度を V、重心を通る軸のまわりの回転の角速度を ω とする。球が床ではね返った後、水平方向の速度が $V + \Delta V_x$、重心を通る軸のまわりの回転の角速度が $\omega + \Delta\omega$ になったとして、以下の問いに答えよ。なお、空気抵抗は無視できるものとする。

問 1. 重力により、球の重心のまわりの角運動量は時間変化しないことを説明せよ。

問 2. 球が床ではね返るとき、水平方向に摩擦力 $f(t)$ がはたらくものとする。ここで、$f(t)$ は時刻 t の関数である。球は時刻 $t = 0$ に床に衝突し、摩擦力は短い時間 Δt だけはたらくものとする。ΔV_x を $\displaystyle\int_0^{\Delta t} f(t)dt$ を用いて表せ。

問 3. 球の重心を通る軸のまわりの慣性モーメントを I とする。$\Delta\omega$ を $\displaystyle\int_0^{\Delta t} f(t)dt$ を用いて表せ。

問 4. ΔV_x と $\Delta\omega$ の間の関係を求めよ。

問 5. I が $\dfrac{2}{5}Ma^2$ で与えられることを示せ。

問 6. 球が床から離れる際に、球が滑っていないとして、ΔV_x を a、M、V、ω の中から必要なものを用いて表せ。

問 7. 球が床ではね返った後、$V + \Delta V_x$ が負になる条件を a、M、V、ω の中から必要なものを用いて表せ。

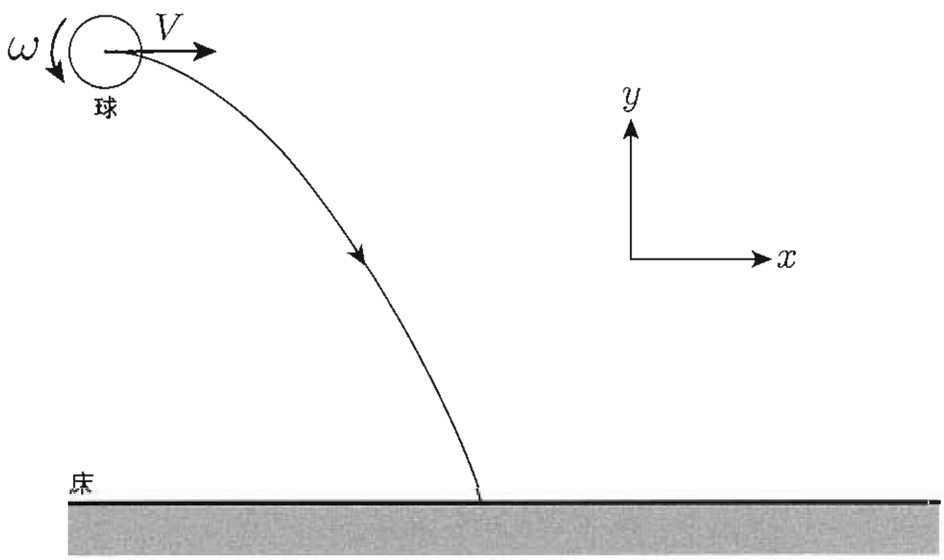

図 1

[I-B] 図 2 のように、固定点 O からつるした長さ $2l$ の質量の無視できる糸の先端に、質量 M、長さ $2l$ の密度が一様な棒の端を固定したものを考える。固定点 O を座標原点として水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸 (上向きを正) をとり、糸と棒は xy 平面内で振動するものとする。糸および棒が $-y$ 方向となす角を、反時計回りの方向を正として θ および ϕ とする。重力加速度の大きさを g とし、糸はたるまないとして以下の問いに答えよ。なお、この棒の重心を通り、棒に対して垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\dfrac{1}{3}Ml^2$ である。

問 1. 棒の重心の座標 (x, y) を、l、θ、ϕ を用いて表せ。

問 2. 棒の位置エネルギー U を求めよ。ただし、原点 O を位置エネルギーが 0 となる基準点とせよ。

以下では、微小振動を考えることとし、θ、ϕ、$\dot{\theta}$、$\dot{\phi}$ は微小量とする。また、微小量の次数については、例えば $\dot{\theta}^2$ や $\dot{\theta}\dot{\phi}$ は微小量の 2 次であり、$\theta^2\dot{\theta}$ は微小量の 3 次である。

問 3. 棒の運動エネルギー T を、l、M、θ、ϕ、$\dot{\theta}$、$\dot{\phi}$ の中から必要なものを用いて表せ。ただし、微小量の 2 次の項までで近似せよ。

問 4. **問 2** で求めた位置エネルギー U についても微小量の 2 次の項までで近似をし、この系のラグランジアン L を求めよ。

問 5. ラグランジュの運動方程式を導出せよ。

問 6. この系で、糸と棒が同じ位相で振動する場合の基準振動数を ω_1、ω_2 $(\omega_2 > \omega_1 > 0)$ とすると、

$$\omega_1^2 = \frac{5 - \sqrt{19}}{2}\frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{5 + \sqrt{19}}{2}\frac{g}{l}$$

となることを示せ。

問 7. 基準振動数 ω_1 および ω_2 の振動における角度の比 $\dfrac{\theta}{\phi}$ をそれぞれ求めよ。

問 8. 基準振動数 ω_1 および ω_2 の振動の特徴の違いを図に描いて示せ。

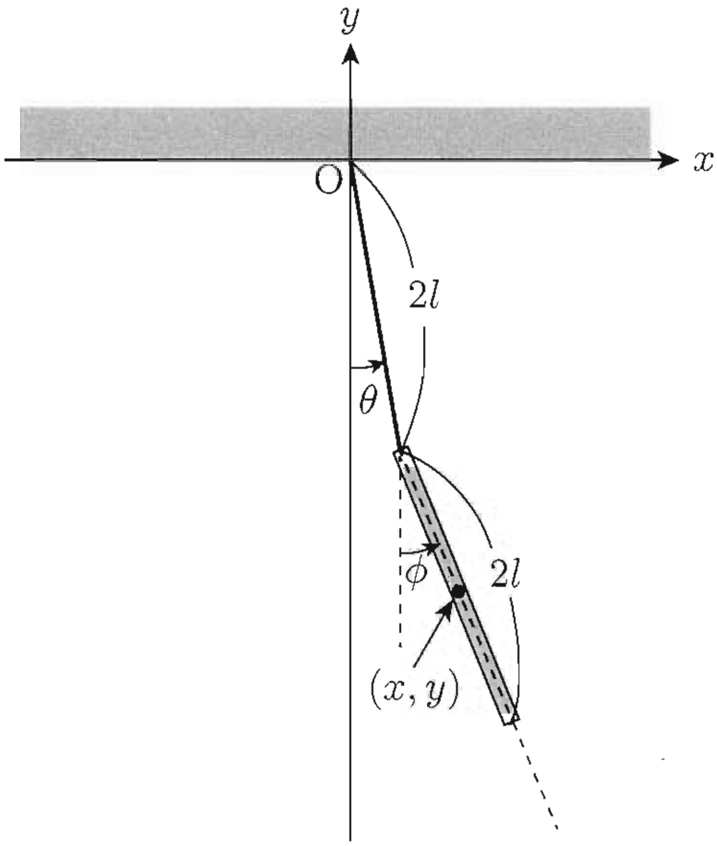

図 2

平成28年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学[Ⅱ]　(125点)　平成27年8月25日(火)　14:40-16:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと。

(2) 問題用紙はこの表紙を含め４枚、解答用紙は２枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使って良い。

(5) 問題用紙は持ち帰ること。

物理学 [II]

[II-A] 透磁率 μ_0 の真空中の静磁場について、以下の設問に答えよ。

問 1. アンペールの法則の微分形に対応する静磁場のマックスウェルの方程式は、$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{i}$ である。ここで $\boldsymbol{B}$ は磁束密度、$\boldsymbol{i}$ は電流密度である。この方程式からアンペールの法則の積分形を導出せよ。解答には、積分範囲等を図示しつつ、式変形を簡潔に説明せよ。

問 2. 図１に示すように、直交座標系における z 軸上に無限に長い直線導線があり、一定の電流 I が流れている。x 軸上の点 Q $(a, 0, 0)$ における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の大きさと向きを求めよ。

問 3. 問２と同様の電流によって点 Q に発生する磁束密度のうち、$z=-\infty$ から図１の点 P までの範囲を流れる電流による寄与を、ビオ・サバールの法則を用いて求めよ。ここで、直線 PQ と z 軸のなす角を θ_1 とする。

ビオ・サバールの法則：
$\boldsymbol{r}'$ の位置にある電流素片 $Id\boldsymbol{r}'$ が、$\boldsymbol{r}$ の位置に生み出す磁束密度 $d\boldsymbol{B}$ は、
以下の式で与えられる。

$$d\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

問 4. 図２に示すように、原点 O で x 軸に対称に角度 2α で折り曲げられた xz 平面内の導線に、一定の電流 I が流れている。導線を原点 O で２つに分け、図２に示す z' 軸と z'' 軸上を流れる電流と考えることで、点 Q $(a, 0, 0)$ における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の大きさと向きを求めよ。

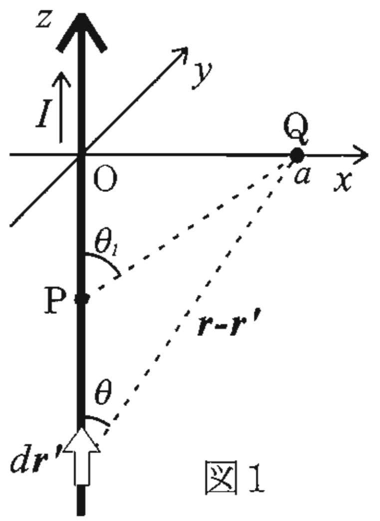

図1

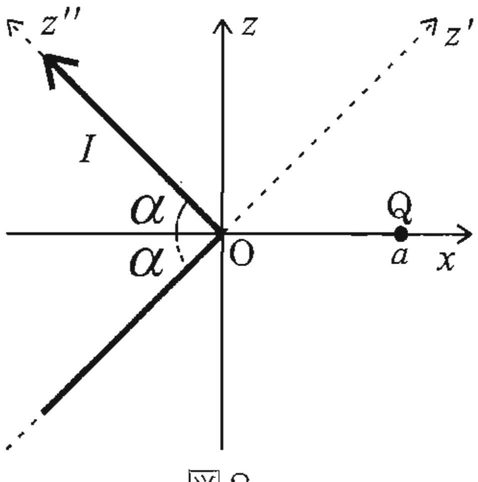

図2

[II-B] 特に断りの無い限り、空間は誘電率 ϵ_0 の真空として、以下の設問に答えよ。

問 1. 図 3 に示すように、z 軸の向きに大きさ E_0 の一様な電場が印加されている空間の原点 O に、半径 a, 誘電率 ϵ_1 の誘電体球を配置した。誘電体球には電気双極子モーメントが誘起され、周囲の電場が変化するため、極座標表示における電位 $V(r,\theta,\phi)$ は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta,\phi) &= V_0(r,\theta,\phi) + \frac{\beta_0}{r} + \frac{\beta_1}{r^2}\cos\theta & (r > a) \\
V(r,\theta,\phi) &= \alpha_0 + \alpha_1 r\cos\theta & (r \leq a)
\end{aligned}
$$

ここで、$V_0(r,\theta,\phi)$ は誘電体球を置く前の電位であり、 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ は定数または E_0 の関数である。以下の手順でこれらを求める。

(a) 誘電体球を置く前の電位 $V_0(r,\theta,\phi)$ を、原点 O を基準点として求めよ。

(b) 上に記載した式において、球の表面における電位の境界条件を用いることで、$(\boxed{\ \mathrm{A}\ })\cos\theta + \boxed{\ \mathrm{B}\ } = 0$ の関係式が得られる。$\boxed{\ \mathrm{A}\ }$, $\boxed{\ \mathrm{B}\ }$ に当てはまる式を求めよ。

(c) 同様に、球の表面に垂直な電束密度に関する境界条件を用いることで、$(\boxed{\ \mathrm{C}\ })\cos\theta + \boxed{\ \mathrm{D}\ } = 0$ の関係式が得られる。$\boxed{\ \mathrm{C}\ }$, $\boxed{\ \mathrm{D}\ }$ に当てはまる式を求めよ。

(d) 上で求めた 2 つの関係式は、任意の θ について成立する。
このことを用いて $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ を求めよ。

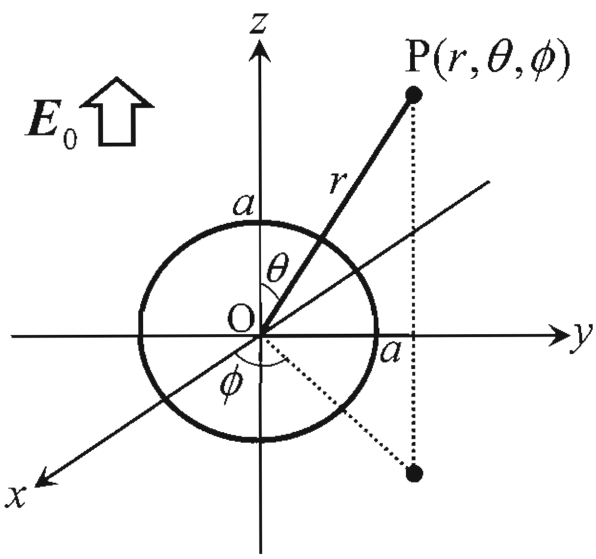

図3

問 2. 図 4 に示すように、原点 O から距離 l だけ離れた z 軸上の点 A および B に、それぞれ $-q$, $+q$ の点電荷が存在し、大きさ $2ql$ の電気双極子モーメントを形成している。周辺の電位は、$r \gg l$ の時、無限遠を基準点として

$$\Psi(r,\theta,\phi) \approx \frac{ql\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

で与えられる。$r \gg l$ である点 P $(r,\theta,0)$ に、原点と同じ電気双極子を配置した際に働く双極子間の静電相互作用について考える。

(a) 2 つの双極子間の相互作用エネルギー W は、図 4 の点 A' $(r-\delta r,\theta+\delta\theta,0)$ と点 B' $(r+\delta r,\theta-\delta\theta,0)$ に、それぞれ $-q$ と $+q$ の電荷を個別に置いた時の静電エネルギーの和に対応する

$$W = -q\Psi(r-\delta r,\theta+\delta\theta,0) + q\Psi(r+\delta r,\theta-\delta\theta,0)$$

で計算できる。ここで、微小量 δr および $\delta\theta$ に関して 1 次の近似を用いることで、

$$W \approx \boxed{\text{E}}\,\delta r + \boxed{\text{F}}\,\delta\theta$$

と記述できる。$\boxed{\text{E}}$ と $\boxed{\text{F}}$ に当てはまる式を求めよ。

(b) δr および $\delta\theta$ を、r, l, θ のうち必要なものを用いて表せ。ただし、2 次以上の微小量は無視せよ。

(c) 前問の結果を用いて 2 つの双極子モーメントの間に働く相互作用を求めると、動径方向（OP 方向）に引力が働くための条件は、$\cos^2\theta > \boxed{\text{G}}$ であることが分かる。$\boxed{\text{G}}$ に当てはまる数を求めよ。

図 5 に示すように、真電荷を持たない誘電体球が乱雑に分散した絶縁流体がある。この流体に電場を印加した際に、誘電体球の間に働く静電相互作用について考える。

(d) 問 1 で求めた誘電体球周辺の電位の変化は、電場との相互作用により、球に z 方向の電気双極子が誘起されたために生じたと解釈できる。Ψ と問 1 の $V - V_0$ の表式を比較して、誘電体球に誘起された双極子モーメントの大きさを求めよ。

(e) 図 5 の流体に上下方向に電場を印加したところ、誘電体球の分散状態が変化した。電場が印加された状況での分散状態の概略を図に描き、その理由を述べよ。

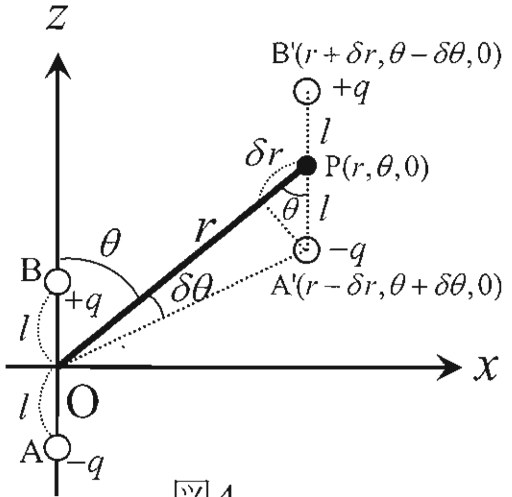

図4

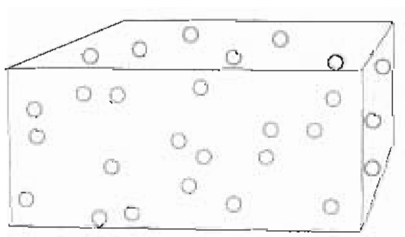

図 5

平成28年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学[Ⅲ] （125点） 平成27年8月25日(火) 16:20-17:40

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと。

(2) 問題用紙はこの表紙を含め３枚、解答用紙は２枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使って良い。

(5) 問題用紙は持ち帰ること。

物理学 [III]

[III-A] 量子力学においては、質点の座標 x と運動量 p とを同時に正確に決定することはできず、両者の不確定さ（量子ゆらぎ）の間には

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$$

の関係（不確定性関係）がある。ここで $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。この関係に基づいて、量子力学系の基底状態（エネルギーが最低の状態）のおおまかな性質を調べる。

問 1. 1 次元の座標を x、運動量を p として、質量が m、角振動数が ω の調和振動子のハミルトニアン H を書け。

問 2. 問 1 の 1 次元調和振動子において、古典力学では $p = 0$、$x = 0$ でエネルギーが 0 の状態が実現する。量子力学では不確定性関係からエネルギーが 0 の状態が不可能になる。問 1 のハミルトニアン H で $p \to \Delta p$、$x \to \Delta x$ と置き換え、さらに基底状態に対しては不確定性が最も小さくなると考えて、基底状態のエネルギーのおおよその値を求めよ。

問 3. m を電子の質量、e は電荷素量、ε_0 を真空の誘電率として、水素原子のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}, \qquad r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

であたえられる。基底状態は空間的に等方的と考えられるので、x 方向の不確定さを Δx とすると、r の不確定さは

$$\Delta r = \sqrt{3}\Delta x$$

と評価される。また運動量については上の 1 次元の問題と同様に考え、H を Δx の関数として、その最小値から水素原子の基底状態のエネルギーのおおよその値を求めよ。また、これは基底状態のエネルギーの正確な値

$$-\frac{m}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2$$

の何倍になるか。

問 4. 定数 $V_0 > 0$ として、

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & 0 < x < a, \\ 0, & \text{それ以外の } x, \end{cases}$$

で与えられる一次元井戸型ポテンシャル中を運動する質量 m の質点を考える。質点の位置の不確定さが井戸の幅と等しい $\Delta x = a$ として、基底状態のエネルギーをおおまかに評価し、束縛状態が一つ以上あるための条件を求めよ。（注意：シュレディンガー方程式を解く必要はない。）

[III-B] 1 次元の量子力学を考える。以下で $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。$|x| \to \infty$ で 0 となる波動関数 $\psi(x)$ と $\phi(x)$ に対して、演算子 X と

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)^* X \phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, [X^\dagger \psi(x)]^* \phi(x) \tag{1}$$

の関係を満たす演算子 $X^\dagger$ を X のエルミート共役と呼ぶ。

問 1. (1) 式を用いて、微分演算子 $X = i\hbar\frac{d}{dx}$ のエルミート共役が、$X^\dagger = i\hbar\frac{d}{dx}$ であることを示せ。

問 2. (1) 式の両辺の複素共役を考え、さらに $\psi(x) \to \phi(x)$、$\phi(x) \to \psi(x)$ の置き換えを行うことで、$(X^\dagger)^\dagger = X$ であることを示せ。

問 3. 任意の演算子 X に対して、積 $X^\dagger X$ の期待値

$$\left\langle X^\dagger X \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)^* X^\dagger X \psi(x)$$

は必ず 0 もしくは正になることを示せ。

問 4. $\langle X^\dagger X \rangle = 0$ となるために波動関数 $\psi(x)$ が満たすべき条件を示せ。

問 5. ポテンシャルエネルギー

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}, \qquad V_0 > 0, \qquad \alpha > 0,$$

の中を運動する質量 m の質点に対するシュレディンガー方程式

$$H\psi(x) = E\psi(x), \qquad H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}, \tag{2}$$

の最低エネルギー固有値と固有関数を求めたい。このために、演算子

$$X \equiv i\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx} + ir\tanh(\alpha x)$$

を導入すると、ハミルトニアンが

$$H = \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\left(X^\dagger X - r^2\right)$$

と書けることを確かめよ。ここで定数 r は

$$r \equiv \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mV_0}{\alpha^2\hbar^2}}\right)$$

で定義される。関係式

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}, \qquad \tanh^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x},$$

を使ってもよい。

問 6. 問 3 の結果を利用して、上の (2) 式のエネルギー固有値に対する下限を求めよ。結果だけではなく、その導出も説明すること。

問 7. さらに問 4 の結果を利用し、最低エネルギー固有値を与える固有関数を求めよ。ただし、波動関数の規格化はしなくてよい。

平成28年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学［Ⅳ］ （125点） 平成27年8月26日(水) 9:00-10:20

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと。

(2) 問題用紙はこの表紙を含め４枚、解答用紙は３枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使って良い。

(5) 問題用紙は持ち帰ること。

物理学 [IV]

[IV-A] 温度 T、体積 V の 1 モルの理想気体について考える。この気体のエントロピーを S とする。

問 1. 温度が T から $T + \mathrm{d}T$ に、体積が V から $V + \mathrm{d}V$ に微小変化する準静的過程を考える。このときのエントロピーの変化 $\mathrm{d}S$ を気体定数 R と定積モル比熱 C_V を用いてあらわせ。

問 2. 温度一定の準静的過程で体積が V_1 から V_2 に変化したとする。このときのエントロピーの変化量を求めよ。

問 3. 体積一定の準静的過程で温度が T_1 から T_2 に変化したとする。このときのエントロピーの変化量を求めよ。

[IV-B]K 個の異なる実数 $E_1, E_2, \cdots, E_K$ を並べて N 項からなる数列をつくることを考える。このとき、ひとつの数列が含む E_i の個数を n_i とすると、$\displaystyle\sum_{i=1}^{K} n_i = N$ である（$i = 1, 2, \cdots, K$）。

例えば、$K = 3,\ N = 8$ のとき、$(E_3, E_2, E_3, E_1, E_2, E_1, E_1, E_3)$ がそのような数列のひとつであり、$n_1 = 3,\ n_2 = 2,\ n_3 = 3$ である。

問 1. 一般の K と N について、$n_1, n_2, \cdots, n_K$ の値を固定したときに、W 個の異なる数列をつくることができる。この W を求めよ。

以下では、$n_i \gg 1,\ N \gg K \gg 1$ とする。

問 2. $M \gg 1$ ならば $\log_e M! = M(\log_e M - 1)$ として、$\log_e W$ を求めよ。

問 3. $p_i = \dfrac{n_i}{N}$ とおいて、$\dfrac{1}{N}\log_e W$ を p_i を用いてあらわせ。

問 4. E を定数として、2 つの拘束条件 $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{K} p_i E_i$ と $1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{K} p_i$ のもとで p_i を変化させたときに、$\dfrac{1}{N}\log_e W$ が極値をとるような p_i を求めると、$p_i = \dfrac{1}{Z}\exp(aE_i)$ となることをラグランジュの未定乗数法を用いて示せ。ただし、$Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{K} \exp(aE_i)$ であり、a は任意の数である。

問 5. $\dfrac{\partial \log_e Z}{\partial a} = E$ となることを示せ。

問 6. $\langle E^2 \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{K} p_i E_i^2$ として、$\dfrac{\partial^2 \log_e Z}{\partial a^2}$ を $\langle E^2 \rangle$ と E を用いてあらわせ。

[IV-C] グランドカノニカル分布を用いて、半導体中の不純物に局在した電子からなる系について考える。系は熱平衡状態にあり、温度を T、電子の化学ポテンシャルを μ、ボルツマン定数を k_{B} とする。

簡単のため、次のようなモデルを採用する。

- 各不純物は独立であるとし、N 個の等価な不純物が存在する。
- 各電子は独立であるとし、ひとつの不純物に対して、電子のない状態、$\uparrow$ スピンの電子が 1 個ある状態、$\downarrow$ スピンの電子が 1 個ある状態の 3 つの状態がゆるされるものとする。それぞれの状態のエネルギーの値を順に $E_0, E_\uparrow, E_\downarrow$ とする。

$E_0 = 0,\ E_\uparrow = \epsilon,\ E_\downarrow = \epsilon$ として問 **1** から問 **3** に答えよ。

問 1. この電子系の大分配関数を求めよ。ただし、大分配関数は $\Xi = \sum \exp[-(E-\mu N_{\mathrm{e}})/(k_{\mathrm{B}}T)]$ で与えられる。ここに、E と N_{e} は系の状態をひとつ決めたときの全エネルギーおよび全電子数であり、各不純物位置でのエネルギーおよび電子数の総和で与えられる。$\sum$ はゆるされるすべての状態についての和である。

問 2. 全電子数 N_{e} の期待値を求めよ。

問 3. 全エネルギー E の期待値を求めよ。

半導体を大きさ H の一様な磁場の中に置き、$E_0 = 0,\ E_\uparrow = \epsilon - \lambda H,\ E_\downarrow = \epsilon + \lambda H$ となったとして問 **4** から問 **6** に答えよ。ただし、$\lambda > 0$ とする。

問 4. ひとつの不純物について、電子がない確率 p_0、$\uparrow$ スピンの電子が 1 個ある確率 $p_\uparrow$、$\downarrow$ スピンの電子が 1 個ある確率 $p_\downarrow$ を求めよ。

問 5. 磁化 $M = \lambda(p_\uparrow - p_\downarrow)N$ を求めよ。

問 6. $H \to 0$ での磁化率 $\chi = \lim_{H\to 0} \dfrac{M}{H}$ を求めよ。