平成 29 年度　大学院修士課程　入学試験問題

物理学[I]　(125 点)

平成 28 年 8 月 24 日（水）13:00 - 14:20

注意事項

(1)　試験開始の合図があるまでこの問題冊子を開かないこと。

(2)　問題用紙はこの表紙を含めて５ページ、解答用紙は２枚である。

(3)　すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4)　大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使用してよい。

(5)　解答にあたっては最終結果のみでなく、その途中過程も記述すること。

(6)　問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [I]

[I-A]　図 1 のような、糸でつながれた半径 R、質量 M の一様な剛体円盤がある。円盤には糸がまかれており、糸の全長は h である。糸の一端は台に固定されており、他方の端は円盤に固定されている。糸の質量と太さ、摩擦は無視できる。糸が台に固定された位置を原点 O とし、水平右方向に x 軸、鉛直下方に y 軸をとる。最初、円盤は重心が座標 $(x, y) = (R, 0)$ の位置に静止しており、時刻 $t = 0$ において初速度 $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$ で円盤を静かに離す。すると糸は円盤からすべらずたわむことなくほどかれ、円盤は回転軸を xy 平面に垂直に保って回転しながら鉛直方向に落下してゆく。重力加速度 g を下向きにとり、空気抵抗は無視できるとして、以下の問いに答えよ。

問 1．円盤の重心を通る回転軸のまわりの慣性モーメント I を求めよ。

問 2．落下し始めてから円盤が回転した累積の角度を θ とする。糸が円盤から滑らずにほどかれる拘束条件を $y = R\theta$ と表す。すると、拘束条件下でのラグランジアン L は次の式で書ける。

$$L = K - V - \lambda(y - R\theta)$$

ここで、K は運動エネルギー、V は重力による位置エネルギー、λ は未定乗数である。M, R, I, g, λ, y, $\dot{y}$, θ, $\dot{\theta}$ を用いて、ラグランジアン L を表せ。ただし、V の基準は点 O とせよ。

問 3．　y, θ に関する運動方程式をそれぞれ求めよ。

問 4．　未定乗数 λ を独立変数とみなす。λ に関するラグランジュ方程式から、加速度 $\ddot{y}$ と角加速度 $\ddot{\theta}$ の関係を示せ。

問 5．ラグランジアンの表式から、λ は力の次元をもっており、この系での拘束力であることがわかる。λ を求め、この力が何に対応するかを述べよ。

問 6．落下中の円盤の力学的エネルギーを求めよ。また、それが時間的に変化しないことを示せ。

問 7．円盤が落下して糸の全長がほどけた瞬間における、円盤重心の速度 v_f を求めよ。

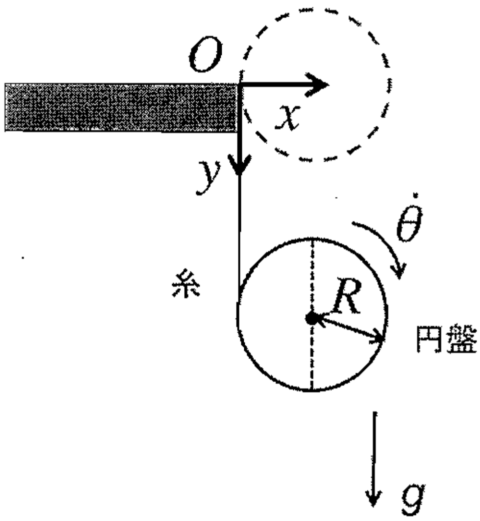

図１

[I-B]　図2のように、半径 R の円輪が1つの直径を鉛直軸にして立てられており、この軸のまわりに一定角速度 Ω で回転している ($\Omega \geq 0$)。円輪には質量 m の質点が通されており、円輪上を摩擦なく自由に運動できるものとする。円輪の中心と質点を結ぶ線が回転軸となす角度を θ、円輪の回転角度を ϕ、重力加速度を下向きに g として、以下の問いに答えよ。

問1．質点はまわる円輪に束縛された強制運動をしている。質点の運動エネルギー K と重力による位置エネルギー V から、質点の運動を記述するラグランジアン $L = K - V$ を求めよ。

問2．$\Omega_c^2 = g/R,\ k = \Omega^2/\Omega_c^2$ とおきかえると、角度 θ についての運動方程式は次の式になることを示せ。

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \sin\theta(k\cos\theta - 1)$$

ただし $v = \dot{\theta}/\Omega_c$ である。

問3．前問の結果より、この系の運動について保存量が求まる。この保存量は有効運動エネルギー $\frac{1}{2}v^2$ と有効ポテンシャルエネルギー $U(\theta)$ の和と考えられる。$U(0) = -1$ を基準とする $U(\theta)$ を求めよ。

問4．円輪の回転速度が小さく $\Omega < \Omega_c$（または $k < 1$）であるとき、有効ポテンシャル $U(\theta)$ の概形を図示せよ。平衡点の位置を明記し、その安定性についても述べよ。

問5．同様に $\Omega < \Omega_c$ とする。安定な平衡点のまわりでの微小振動の角振動数 ω_1 を Ω と Ω_c を用いて表せ。

問6．回転速度が大きくなり $\Omega > \Omega_c$（または $k > 1$）となると、平衡点が新たに出現する。有効ポテンシャルの概形を図示せよ。平衡点の位置を明記し、安定性についても述べよ。

問7．同様に $\Omega > \Omega_c$ とする。安定な平衡点のまわりでの微小振動の角振動数 ω_2 を Ω と Ω_c を用いて表せ。

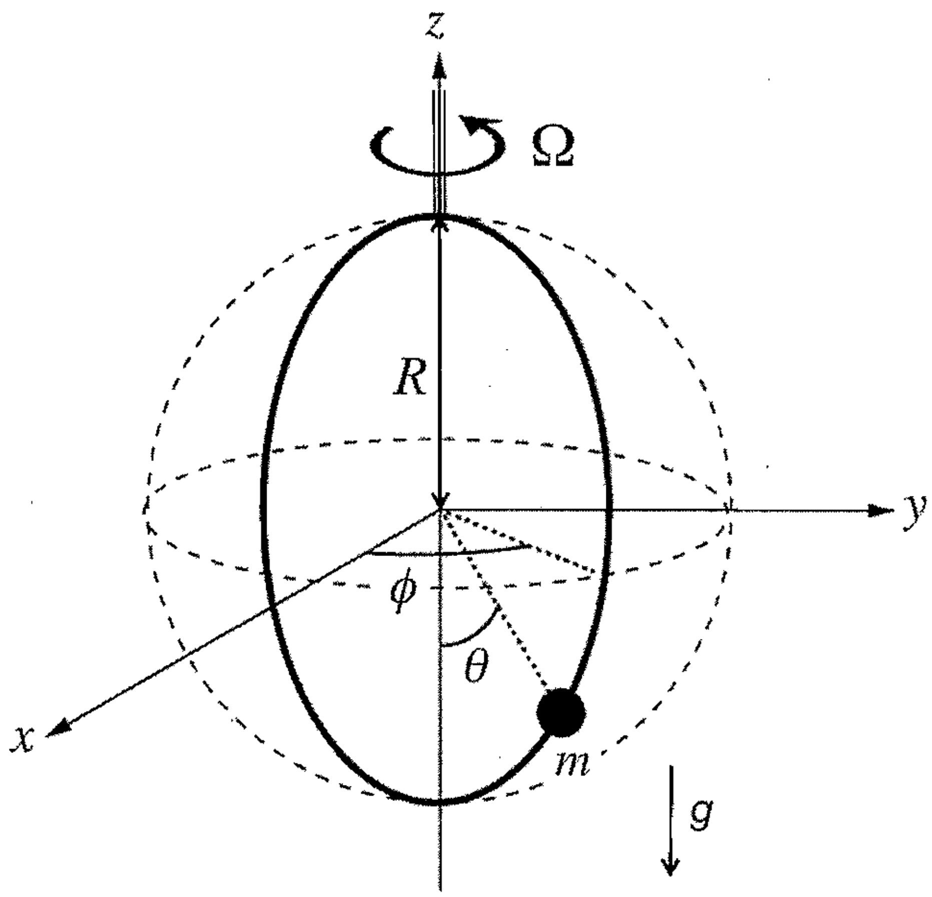

図2

平成29年度　大学院修士課程　入学試験問題

物理学[II]　(125点)

平成28年8月24日（水）14:40 - 16:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの問題冊子を開かないこと。

(2) 問題用紙はこの表紙を含めて４枚、解答用紙は３枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使用してよい。

(5) 解答にあたっては最終結果のみでなく、その途中過程も記述すること。

(6) 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [II]

全問題を通して、真空の誘電率を ε_0、真空の透磁率を μ_0 とする。

[II-A]　電荷と電流のない真空中における微分形の Maxwell 方程式は、3 次元電場ベクトルを $\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)$、磁束密度ベクトルを $\boldsymbol{B}=(B_x,B_y,B_z)$ として、

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\boldsymbol{E} &= 0, &(1)\\
\mathrm{div}\boldsymbol{B} &= 0, &(2)\\
\mathrm{rot}\boldsymbol{B} &= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, &(3)\\
\mathrm{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, &(4)
\end{aligned}$$

で与えられる。

波数ベクトル $\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)$ で真空中を伝播する電磁波の時刻 t、位置 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ における $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ がそれぞれ $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$ で与えられ、これらが上記の Maxwell の方程式を満足するとして、以下の問いに答えよ。ただし、角振動数を ω、$|\boldsymbol{k}|=k$ とし、$\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{B}_0$は位置によらない定ベクトルである。

問 1. (1) 式から、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{k}$ が直交すること、および (2) 式から、$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{k}$ が直交することを示せ。

問 2. (3) 式を用いて $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{k}$ の間に成り立つ関係式を導け。これより、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ が直交することを示せ。また、電場の大きさ $E=|\boldsymbol{E}|$ を磁束密度の大きさ $B=|\boldsymbol{B}|$ を用いて表せ。

問 3. (4) 式と問 2 の結果から、この電磁波の位相速度 $v\ (=\omega/k)$ が $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ となることを示せ。

問 4. 電磁波の存在する空間に蓄えられている単位体積当たりの電磁場のエネルギー u を E を用いて表せ。

問 5. $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/\mu_0$ で定義されるポインティングベクトルの大きさを、u を用いて表せ。

[II-B]　大気中（誘電率を ε_0 とする）に半径 a, b（ただし、$b > a$）の２つの厚さの無視できる円筒導体がその軸を一致するように配置されている。図１にその軸に垂直な断面を示す。いま、円筒はその間隔に比べて十分に長いものとし、以下では端の効果は無視するものとする。内部および外部円筒にそれぞれ軸方向の単位長さあたり $+\lambda$ および $-\lambda$（ただし、$\lambda > 0$）の電荷を与えた。中心軸からの距離を r として以下の問いに答えよ。

問 1. 中心軸から r（$0 < r < \infty$）の位置での電場強度 $E(r)$ を求め、図示せよ。

問 2. 内外の円筒の電位差 V_{ab} を求めよ。

問 3. 内外の円筒に挟まれた領域をコンデンサと見なすとき、軸方向の単位長さあたりの静電容量 C を求めよ。

次に、図２に示すように図１の同軸円筒に電池（電圧源）により一定の電位差 V を与え、その端を密度が ρ、誘電率 ε の液体に浸したとき、端からの高さ h まで液面がゆっくりと上昇して安定した。以下では、液体の侵入による外部の液面の変化や、表面張力の寄与、大気圧、円筒の端の電場に対する効果、粘性による発熱は無視するものとする。

まず、図３のように液面を Δx だけ上昇させた際の全静電エネルギーの変化から、液面に働く静電気力 F を求めてみよう。

問 4. 液面の変化による静電容量の変化を求め、これによる静電エネルギーの変化 ΔE を求めよ。

問 5. 両円筒間の電位差を V に保つためには円筒面の電荷が変化しなくてはならない。このとき、電荷を供給するために電池がする仕事 W を求めよ。

問 6. この変化に伴う全静電エネルギーの変化 ΔU は $\Delta U = \Delta E - W$ で与えられる。これを用いて液面に働く静電気力の大きさ F と向きを求めよ。

問 7. 液面の高さ h を ε, ε_0, V, a, b, g, ρ を用いて表せ。ただし、重力加速度の大きさを g とする。

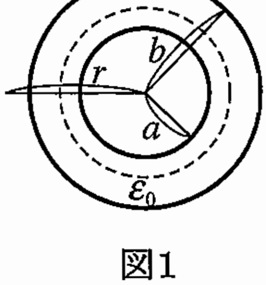

図1

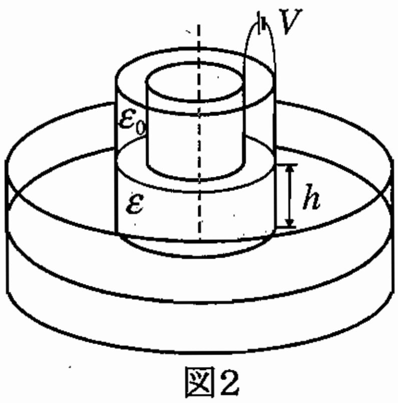

図2

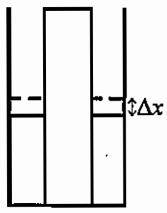

図3

[II-C]　図４のように、無限に長い太さの無視できる直線状導体があり、矢印の向きに定常電流 I_1 が流れている。この導体と同一平面内の、距離 d ($d > a/2$) だけ離れた位置に一辺が a の正方形導体回路ＡＢＣＤが置かれ、図の矢印の向きに定常電流 I_2 が流れているとき、以下の問いに答えよ。

問 1. 定常電流 I_1 が点Ａに作る磁束密度 B_A を求めよ。

問 2. 正方形導体回路ＡＢＣＤが定常電流 I_1 が作る磁場から受ける力の大きさ F とその向きを求めよ。

以下では、正方形導体回路ＡＢＣＤには電流が流れていない場合を考える。

問 3. 定常電流 I_1 が作る磁場が正方形導体回路ＡＢＣＤを貫く磁束 Φ を求めよ。また、直線状導体と正方形導体の間の相互インダクタンス L を求めよ。

問 4. 図５のように正方形導体回路ＡＢＣＤを時刻 $t=0$ で右方向に一定の速度 v で動かす。このとき、回路に流れる誘導電流の大きさ I を時刻 t ($t > 0$) の関数として求めよ。また、その向きも答えよ。ただし、回路の電気抵抗を R とし、$t=0$ における直線状導体と正方形回路の中心との距離を d とする。また、誘導電流による磁場は無視するものとする。

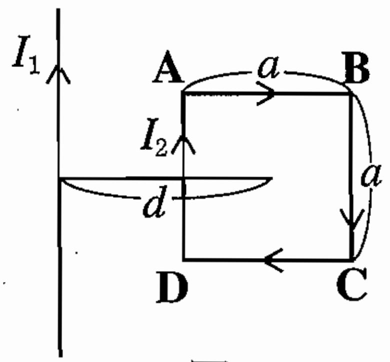

図4

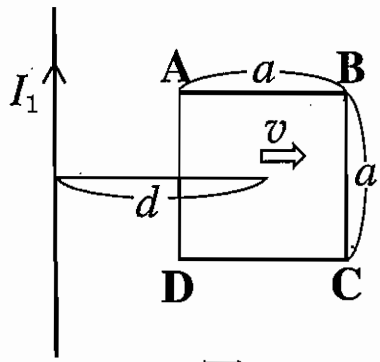

図5

平成 29 年度　大学院修士課程　入学試験問題

物理学[Ⅲ]　(125 点)

平成 28 年 8 月 24 日（水）16:20 - 17:40

注意事項

(1)　試験開始の合図があるまでこの問題冊子を開かないこと。

(2)　問題用紙はこの表紙を含めて３枚、解答用紙は２枚である。

(3)　すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4)　大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使用してよい。

(5)　解答にあたっては最終結果のみでなく、その途中過程も記述すること。

(6)　問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [III]

[III-A] 1 次元の調和振動子を考えるが、計算を簡単にするために、プランク定数を 2π で割った $\hbar = 1$、粒子の質量 $m = 1$、角振動数 $\omega = 1$ の単位系を取る。すなわち、x と p を座標と運動量として、ハミルトニアンは次のように与えられる：

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2). \tag{1}$$

問 1．この単位系のエネルギー、座標、運動量は、それぞれ元の単位系でどのように表わされるか、$\hbar, m, \omega$ を用いて答えよ。

問 2．以下の式によって、生成消滅演算子 $(a^\dagger, a)$ を導入する。

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + ip) \\ a^\dagger = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x - ip) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger + a) \\ p = \dfrac{i}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a) \end{cases}. \tag{2}$$

x と p の間に成り立つ交換関係 $[x, p] = xp - px = i$ に注意して、$[a, a^\dagger] = 1$ 及び $H = a^\dagger a + \frac{1}{2}$ を示せ。

問 3．H と $(a, a^\dagger)$ の交換関係は、$[H, a] = -a$ と $[H, a^\dagger] = a^\dagger$ となる。この結果を用いて、演算子 a 及び $a^\dagger$ がエネルギー固有状態に作用すると、それぞれエネルギーが -1 及び $+1$ 変化した固有状態を作り出すことを示せ。

問 4．エネルギーの下限があることを示せ。従って、最低エネルギー状態 $|0\rangle$ が存在し、消滅演算子 a を作用させると $a|0\rangle = 0$ となること、及び、その最低エネルギー固有値が $\frac{1}{2}$ となることを説明せよ。なお、この $a|0\rangle = 0$ が状態 $|0\rangle$ を決める条件になる。

問 5．以上のことから、エネルギーの固有値 ϵ_n と対応する規格化された固有状態 $|n\rangle$ は

$$\epsilon_n = n + \frac{1}{2}, \qquad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots), \tag{3}$$

と与えられる。この時、次の式が成り立つことを示せ。

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \tag{4}$$

問 6．以上の結果を用い、座標表示では運動量演算子が $p = \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dx}$ と表されることに注意して、基底状態 $n = 0$ の座標表示での規格化された波動関数 $\varphi_0(x)$ が、

$$\varphi_0(x) = \pi^{-1/4}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

となることを示せ。

問 7．第一励起状態の座標表示での規格化された波動関数 $\varphi_1(x)$ を求めよ。

[III-B] 次に、2次元の調和振動子を考える。問題 [III-A] と同様に $\hbar = m = \omega = 1$ の単位系を取る。なお、問題 [III-A] の結果は自由に用いてよい。

今考えている粒子は電荷を持っており、xy 平面に垂直な方向に一定で一様な磁場が掛かっているとする。荷電粒子の運動は角運動量に比例する磁気モーメントを通して、磁場との相互作用を生む。座標 (x, y)、運動量 (p_x, p_y) に対し、この磁場との相互作用を考慮するとハミルトニアンは $H = H_0 + H_I$ となり、H_0 と H_I は次のように与えられる：

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2), \tag{5}$$

$$H_I = gL, \qquad L = xp_y - yp_x. \tag{6}$$

ここで、g は磁場や電荷に比例する定数であり、L は xy 軸と右手直交系をなす z 軸回りの角運動量である。H_0 は z 軸まわりに回転対称なので、$[H_0, L] = 0$ となる。以下では、x 方向および y 方向の振動子の生成消滅演算子を $(a_x^\dagger, a_x)$ および $(a_y^\dagger, a_y)$ とする。

問1．$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ となる平面極座標 (r, θ) により演算子 L を座標表示すると、$L = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ となる。これを用いて角度座標 θ に対する固有関数を考え、境界条件から、z 軸回りの角運動量 L の固有値が整数に量子化されることを説明せよ。

問2．[III-A] の結果を用いて、H_0 の固有状態がどうなるかを考える。H_0 のエネルギー固有値は $\epsilon_n = n + 1$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ となることを示し、その固有状態を求めよ。また、その縮退度が $n + 1$ になることを示せ。

問3．生成消滅演算子を用いると、$L = i(a_y^\dagger a_x - a_x^\dagger a_y)$ となることを示せ。

問4．磁場がある場合は、縮退した H_0 の固有空間内で角運動量 L の行列要素を計算し、それを対角化することにより、縮退が解けた H の固有状態が求まる。$n = 2$ の場合について、[III-A] の (4) 式を利用して、3つの H_0 の固有状態に関してこれを行い、$H = H_0 + H_I$ のエネルギー固有値を求めよ。

問5．x 方向および y 方向の生成消滅演算子の代わりに、次の式

$$a_\pm^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger \pm i a_y^\dagger), \qquad \begin{cases} a_x^\dagger = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(a_+^\dagger + a_-^\dagger) \\ a_y^\dagger = \dfrac{-i}{\sqrt{2}}(a_+^\dagger - a_-^\dagger) \end{cases}, \tag{7}$$

によって、$(a_+, a_+^\dagger)$, $(a_-, a_-^\dagger)$ を導入する。これら二組の演算子は独立であり、それぞれが生成消滅演算子の交換関係を満たす。$L = a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-$ となることを示せ。これから、L の固有値は確かに整数を取ることが分かる。

問6．H_0 が $(a_+, a_+^\dagger)$, $(a_-, a_-^\dagger)$ によってどのように表されるか求めよ。次に、磁場がある場合のエネルギー固有値と固有状態を求めよ。H の固有状態は L の同時固有状態でもある。求めたエネルギー固有状態の L の固有値を求めよ。

平成29年度　大学院修士課程　入学試験問題

物理学[IV]　(125点)

平成28年8月25日（木）9:00 - 10:20

注意事項

(1)　試験開始の合図があるまでこの問題冊子を開かないこと。

(2)　問題用紙はこの表紙を含めて４枚、解答用紙は３枚である。

(3)　すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4)　大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使用してよい。

(5)　解答にあたっては最終結果のみでなく、その途中過程も記述すること。

(6)　問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [IV]

以下において，ボルツマン定数を k_{B}, プランク定数を h とする.

[IV-A]　温度 T で熱平衡状態にある N 個の独立な原子の系を扱う. 各原子は磁気モーメント $\mu > 0$ を持ち，一様な磁束密度 $B > 0$ 中でエネルギー $\pm\mu B$ の2つの状態をとる.

問1. この系の分配関数を書き下しなさい. また自由エネルギーを求めなさい.

問2. (a) この系の磁化の大きさを計算しなさい.

(b) 弱磁場 ($\mu B \ll k_{\mathrm{B}}T$) での磁化の大きさの近似式を求めなさい.

(c) 強磁場での磁化の大きさの近似式を求めなさい.

問3. (a) この系のエントロピーを計算しなさい.

(b) 高温 ($k_{\mathrm{B}}T \gg \mu B$) でのエントロピーの近似式を求めなさい.

(c) 低温でのエントロピーの近似式を求めなさい. また $T \to 0$ でエントロピーが0となることを説明しなさい.

[IV-B]　温度一定の熱浴に接している系 A を考える．系 A が量子状態 l にあり，エネルギー E_{Al} をもつ確率を p_{Al} とする．ところで熱平衡での分布法則は系の性質によらない一般的なものなので，p_{Al} は系のハミルトニアンの詳細によらない連続関数 $P(E)$ を使って $p_{Al} = P(E_{Al})$ と書ける．この分布関数 $P(E)$ の関数形を求めてみよう．

系 A とは独立に，上記と同じ熱浴に接している系 B を考える．系 B が量子状態 m にあり，エネルギー E_{Bm} となる確率は，$P(E_{Bm})$ と書ける．系 A と系 B を 1 つの合成系とみなしたとき，量子状態 l, m でエネルギー E_{lm} となる確率を $P(E_{lm})$ で表す．

系 A と系 B が独立であることから，分布関数について

$$P(E_{Al})P(E_{Bm}) = P(E_{lm}) \tag{1}$$

が成り立つ．ただし

$$E_{lm} = E_{Al} + E_{Bm} \tag{2}$$

とする．

なお，考えているハミルトニアンのエネルギー固有値には下限はあるが，上限は無いものとする．

問 1. (1) の両辺を E_{Al} で微分することで，$P(E)$ の関数形を求めなさい．

問 2. 前問で求めた $P(E)$ は，確率分布の条件

$$P(E) \geq 0, \quad \sum_n P(E_n) = 1 \tag{3}$$

を満たすべきである．そのための関数形の条件を述べなさい．

[IV-C]　電磁場と原子の系の熱平衡を考える．各原子はエネルギー E_0 の基底状態の他，E_1 の励起状態を 1 つだけ持つ．2 つの準位の遷移に伴い，吸収・放出される電磁場のエネルギーは

$$h\nu = E_1 - E_0 \qquad (\nu : \text{電磁場の振動数}) \tag{4}$$

である．

単位時間に原子が電磁場を吸収して励起状態に移る確率は，基底状態の原子の個数 N_0 と，電磁場のエネルギー密度 $U(\nu)$ に比例し，

$$P_{0\to 1} = N_0 B_{01} U(\nu) \tag{5}$$

(B_{01} は比例係数) となる．

単位時間に励起状態の原子が基底状態に移る確率は，励起状態の原子の個数 N_1 に比例し

$$P_{1\to 0} = N_1 A_{10} \tag{6}$$

(A_{10} は自発遷移の係数) と表されると仮定する．

問 1. 電磁場と原子の系が定常状態となるとき，$U(\nu)$ を A_{10}, B_{01} および N_0, N_1 で表しなさい．

問 2. 温度 T の熱平衡では原子の基底状態と励起状態はボルツマン分布している．これを使い $U(\nu)$ を $A_{10}, B_{01}, h, \nu, T, k_{\mathrm{B}}$ で表しなさい．

以上の結果は観測事実と一致しない．一方，Planck の公式

$$U(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{1}{\exp(h\nu/k_{\mathrm{B}}T) - 1}\nu^3 d\nu \tag{7}$$

(c:光速度) は観測事実を良く説明する．そこで Einstein は，(6) 式に電磁場の影響で励起状態から基底状態へ移る項 (誘導遷移) を付け加え

$$P_{1\to 0} = N_1 A_{10} + N_1 B_{10} U(\nu). \tag{8}$$

とすると，電磁場と原子の系でも Planck の公式と整合することを示した．

問 3. 電磁場と原子の系が (5) と (8) にしたがって温度 T の熱平衡になる場合の $U(\nu)$ を $A_{10}, B_{10}, B_{01}, h, \nu, T, k_{\mathrm{B}}$ を使って表しなさい．さらに $U(\nu)$ が Planck の公式と一致するには，A_{10}, B_{01}, B_{10} の係数の関係はどのようになるべきかを求めなさい．