平成30年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [I] (125 点)

平成29年8月30日（水）13:00 - 14:20

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの冊子を開かないこと。

(2) 問題用紙はこの表紙を含めて6枚で、解答用紙は2枚である。

(3) 全ての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使用してよい。

(5) 解答にあたっては、最終結果のみでなく。その途中経過も記述すること。

(6) 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [I]

[I-A] 図1のような、質量 m_1 の質点と質量 m_2 の質点の系を考える。それぞれの質点の位置を $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ とする。2質点の間には距離に比例した引力がはたらいており、その比例定数を k とする。また、外力はないものとする。

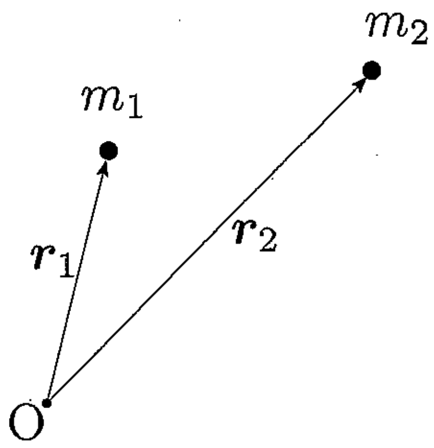

図1

この2質点系の運動を、重心 $\boldsymbol{r}_G = \dfrac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$ の運動と、相対位置 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ の運動に分離する。

問1. 全運動エネルギー T_{tot} を重心の運動エネルギー T_G と相対運動の運動エネルギー T に分離し、$T_{tot} = T_G + T = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\boldsymbol{r}}_G^2 + \dfrac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2$ と表したとき、換算質量 μ を m_1 と m_2 を用いて表せ。導出過程も示すこと。

これ以降では相対運動のみを議論する。その際、解答には換算質量 μ と相対位置 $\boldsymbol{r}$ を用いよ。

問2. $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ の時間微分を計算し、$\boldsymbol{r}$ が同一平面内にとどまり続けることを示せ。

$\boldsymbol{r}$ が同一平面内にあることがわかったので、これ以降では、その平面上での極座標 (r, θ) を用いて運動を表す。ただし平面上の $\theta = 0$ の方向は適当にとる。

問3. 運動エネルギー T と質点間の引力ポテンシャルエネルギー U を r, θ およびそれらの時間微分の関数として表せ。

問4. T と U を用いてラグランジアン $\mathcal{L}$ を構築した場合の、θ に共役な運動量 p_θ を求めよ。

問 5. p_θ が時間によらない定数であることを示せ。

これ以降では、この運動を r 座標のみの一次元問題として考える。p_θ は初期条件として与えられるゼロでない定数であるとして、必要な場合には解答に p_θ を含めてもよい。

問 6. 一次元運動の運動エネルギー T' を求めよ。

問 7. 一次元運動の有効ポテンシャルエネルギーを U' とする。$T + U = T' + U'$ であることに注意して、U' を r のみの関数として求めよ。

問 8. r が時間によらず一定の値 r_0 となるとき、その値を求めよ。

[I-B]　図 2a のように、質量と厚さが無視できる半径 $3a$ の円筒と、その表面上の点 P に固定された質量 m の質点からなる円筒振り子がある。この円筒振り子は、水平に固定された円筒の中心軸 O の周りに回転でき、このため、点 P は重力により振り子のように振動する。

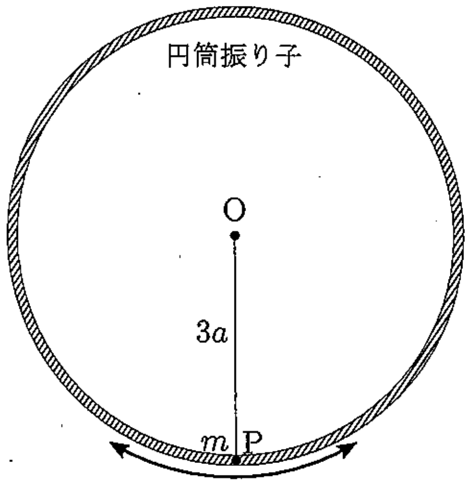

図 2a

問 1. 円筒振り子の、軸 O のまわりの慣性モーメントを求めよ。

次に図 2b のように、この円筒振り子の内面上に、半径 a、質量 $\frac{3}{2}m$ の一様な円柱を置く。円柱は、その中心軸 O′ を軸 O と平行に保ちながら、円筒振り子の内面上を滑らずに転がるものとする。点 P と円柱が接したときの点 P と一致する円柱上の点を点 P′ とする。

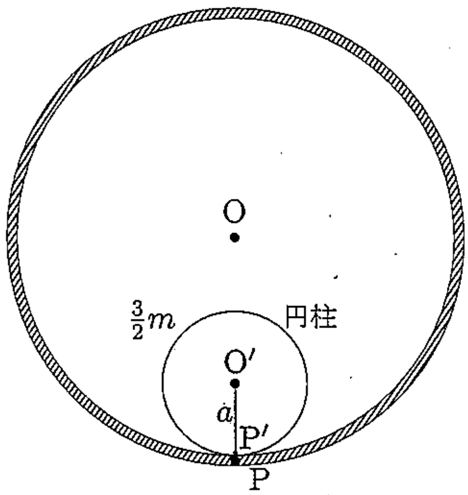

図 2b

問 2. 円柱の中心軸 O′ のまわりの慣性モーメントが $\frac{3}{4}ma^2$ となることを示せ。

図 2c のように、円筒振り子 (点 P) の軸 O まわりの回転角を θ、円柱 (点 P′) の軸 O′ まわりの回転角を ϕ、円柱重心 (点 O′) の軸 O まわりの回転角を α とする。これらの角度 θ, ϕ, α はいずれも鉛直下方を基準 (ゼロ) とし、図 2c において反時計周りを正の方向とする。

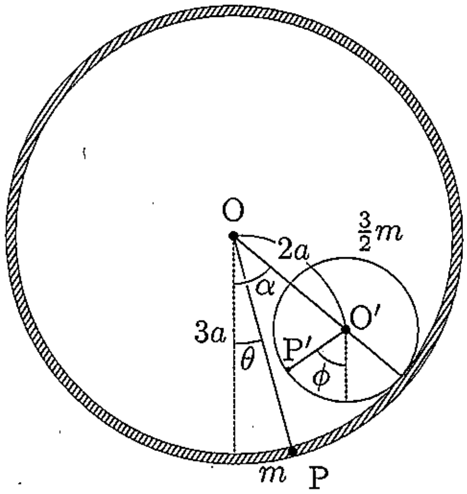

図 2c

問 3. 系の運動エネルギーを円筒振り子の軸 O まわりの回転、円柱の軸 O′ 周りの回転、円柱重心の軸 O まわりの回転、それぞれの運動エネルギーの和と考えて $\dot{\theta}$、$\dot{\phi}$ および $\dot{\alpha}$ の関数として表せ。

問 4. 系の位置エネルギーは円筒振り子重心 (点 P) と円柱重心 (点 O′) の位置エネルギーの和と考えることができる。微小振動 $|\theta| \ll 1, |\alpha| \ll 1$ の場合を考え、位置エネルギーを θ および α についてテイラー展開し 2 次の項までの近似式として表せ。ただし、点 P および点 O′ について、それぞれ $\theta = 0$ および $\alpha = 0$ を位置エネルギーの基準とすること。なお、重力加速度の大きさを g とせよ。

円柱が円筒振り子の内面上で滑らない条件から、$a(\alpha - \phi) = 3a(\alpha - \theta)$、すなわち $\phi = 3\theta - 2\alpha$ の関係がある。運動エネルギーに含まれる $\dot{\phi}$ はこの関係式を用いて消去し、今後、θ (点 P) および α (点 O′) の微小振動にのみ着目することにする。なお以下の解答では g のかわりに $\omega_g^2 = \frac{g}{3a}$ を用いてもよい。

問 5. オイラー・ラグランジュ方程式から、θ および α に関する連立運動方程式を求めよ。

問 6. 基準振動を $\theta = A\cos\omega t$, $\alpha = B\cos\omega t$ と置き、ω^2 の２つの解、ω_1^2 および ω_2^2 $(\omega_1^2 > \omega_2^2)$ を求めよ。

問 7. 前問で求めた２つの基準振動それぞれについて、比 $\dfrac{A}{B}$ を求めよ。

平成 30 年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [II] (125 点)

平成 29 年 8 月 30 日（水）14:40 - 16:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの冊子を開かないこと。

(2) 問題用紙はこの表紙を含めて 6 枚で、解答用紙は 2 枚である。

(3) 全ての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使用してよい。

(5) 解答にあたっては、最終結果のみでなく。その途中経過も記述すること。

(6) 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [II]

全問題を通して、真空の誘電率を ϵ_0、真空の透磁率を μ_0 とする。また、座標系は右手系の xyz 直交座標系を用いるものとする。

[II-A]　以下の問いに答えなさい。

問 1. 真空中に置かれた無限に広い一様な厚さ d の平面板の中に電荷が以下の密度で詰まっている。ただし、x 軸は板の法線に平行とし、x 軸の原点は板の中心にあるものとする。また、板の誘電率を ϵ とする。

$$\rho = 4\rho_0 \frac{x^3}{d^3} \qquad \left(-\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2}\right)$$

(1) この電荷が板の内外で作る電場 $\boldsymbol{E}(x)$ を求めよ。

(2) この電荷による板の内外での電位 $\phi(x)$ を求めよ。ただし、電位の基準は原点にあるとする。

問 2. 真空中に置かれた無限に広い厚さ d の導体平面板の中に一様な電流が流れている。電流密度の大きさは i とする。x 軸は板の法線に平行で、x 軸の原点は板の厚さの中心にある。また、電流方向に z 軸をとるものとする。

(1) この電流が作る板の内外での磁束密度 $\boldsymbol{B}(x)$ を求めよ。

(2) $\boldsymbol{B}(x)$ の各成分をグラフに描け。

問 3. 図 1 のような xy 平面上にある放物線状の導線 $y^2 = ax$ を流れる定常電流 I が、放物線の焦点 $\mathrm{F}(a/4, 0, 0)$ に作る磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよう。ただし、電流は y 軸の正の向きに向かって流れているものとする。

(1) 放物線上の任意の点 P と焦点 F の距離を r、直線 FP と x 軸のなす角を θ とする。点 P の x 座標と y 座標を r と θ で表せ。

(2) この放物線を r と θ で表したとき、

$$r = \frac{a}{2(1 - \cos\theta)}$$

となることを示せ。

(3) 点 P における接線と直線 FP のなす角度を ϕ とする。放物線上の微小な線分 PP' の長さを ds、角 PFP' を $d\theta$ としたとき、$\sin\phi ds = rd\theta$ となることを示せ。

(4) (1) から (3) の結果およびビオ・サバールの法則を用いて、焦点 F における磁束密度の大きさおよび向きを答えよ。

ビオ・サバールの法則：

$\boldsymbol{r}'$ の位置にある電流素片 $Id\boldsymbol{r}'$ が、$\boldsymbol{r}$ の位置に生み出す磁束密度 $d\boldsymbol{B}$ は、以下の式で与えられる。

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

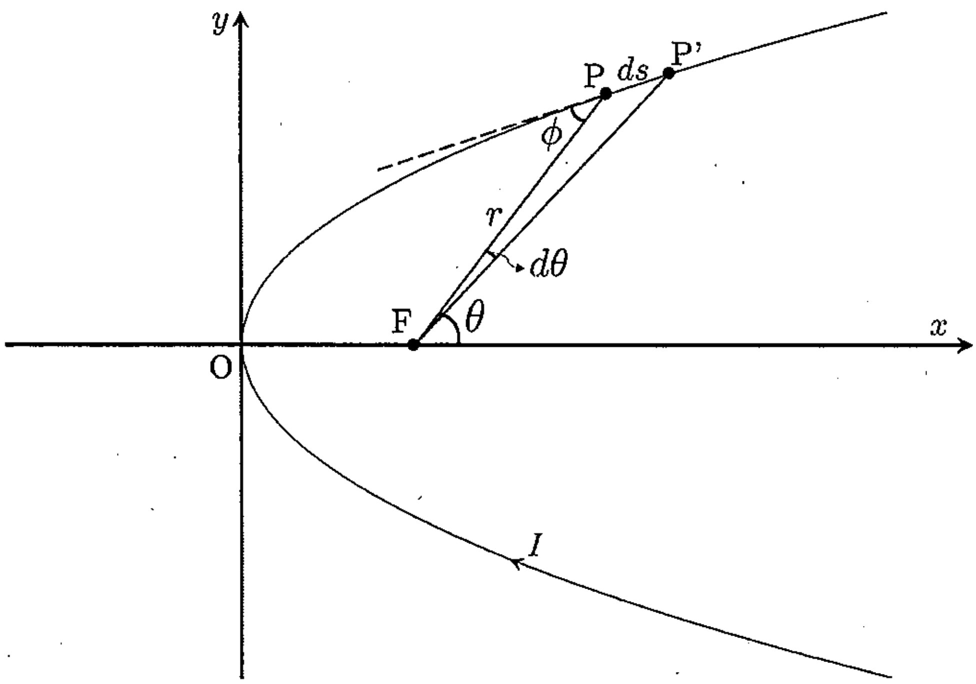

図 1

[II-B]　四方を導体板で囲った筒状のものを導波管と呼ぶ。導波管内を伝播する電磁波を考えよう。図2のように、導波管の断面は一定で、長辺の長さがa、短辺の長さがbの長方形であるものとする。長辺はx軸上の$x \geq 0$の領域に、短辺はy軸上の$y \geq 0$の領域にある。電磁波はz方向の正の向きに伝播するものとする。

電荷と電流のない真空中における微分形のマクスウェル方程式は、電場を$\boldsymbol{E}$、磁場を$\boldsymbol{H}$として、

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{E} &= 0\\ \mathrm{div}\boldsymbol{H} &= 0\\ \mathrm{rot}\boldsymbol{E} &= -\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\\ \mathrm{rot}\boldsymbol{H} &= \epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

で与えられる。電場、磁場を虚数単位iを用いて以下のような複素数表示で表す。ここで、k, ω, tはそれぞれ波数、角周波数および時刻である。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_0(x,y)\exp\left(i(kz-\omega t)\right)\\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}_0(x,y)\exp\left(i(kz-\omega t)\right)\end{aligned}$$

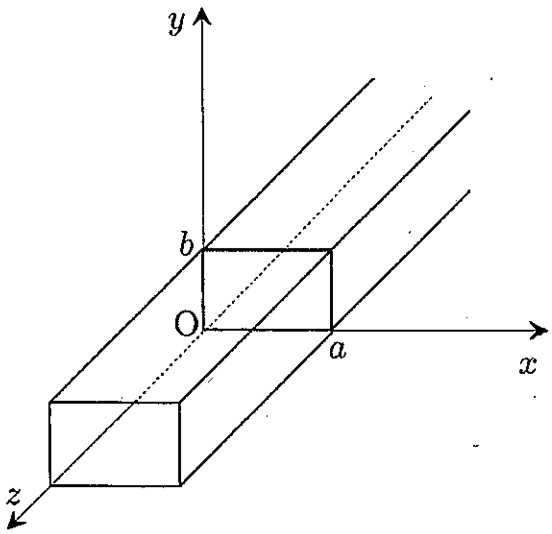

図2

$\boldsymbol{E}_0 = (E_x, E_y, E_z)$、$\boldsymbol{H}_0 = (H_x, H_y, H_z)$ とおくと、真空中のマクスウェル方程式は、

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - ikE_y = i\mu_0\omega H_x \tag{a}$$

$$ikE_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\mu_0\omega H_y \tag{b}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\mu_0\omega H_z \tag{c}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - ikH_y = -i\epsilon_0\omega E_x \tag{d}$$

$$ikH_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\epsilon_0\omega E_y \tag{e}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i\epsilon_0\omega E_z \tag{f}$$

となる。

式 (b) と式 (d) から H_y を消去すると、

$$E_x = \frac{i}{\epsilon_0\mu_0\omega^2 - k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu_0\omega\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \tag{g}$$

となる。同様にして

$$E_y = \frac{i}{\epsilon_0\mu_0\omega^2 - k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial y} - \mu_0\omega\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \tag{h}$$

$$H_x = \frac{i}{\epsilon_0\mu_0\omega^2 - k^2}\left(k\frac{\partial H_z}{\partial x} - \epsilon_0\omega\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) \tag{i}$$

$$H_y = \frac{i}{\epsilon_0\mu_0\omega^2 - k^2}\left(k\frac{\partial H_z}{\partial y} + \epsilon_0\omega\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \tag{j}$$

となる。

問 1. 式 (a) から式 (j) の中で必要なものを用いて、H_z および E_z に関する二階偏微分方程式が以下のようになることを示せ。

$$H_z = -\frac{1}{\epsilon_0\mu_0\omega^2 - k^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) H_z$$

$$E_z = -\frac{1}{\epsilon_0\mu_0\omega^2 - k^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) E_z$$

問 2. 進行方向の電場成分 E_z がゼロであり磁場成分 H_z がゼロでない電磁場を TE 波と呼ぶ。この時、

$$H_z = (A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)) \times (C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y))$$

の解を仮定する。

(1) 角周波数 ω を k, k_x, k_y を使って表せ。

(2) $x = 0$, $x = a$ および $y = 0$, $y = b$ での H_x, H_y に関する境界条件を答えよ。また、その境界条件と式 (i), (j) を用いて、$\partial H_z/\partial x$, $\partial H_z/\partial y$ に関する境界条件を答えよ。

(3) 整数 m, n を用いて、k_x, k_y を表せ。

(4) ファラデーの法則を用いて、導波管断面の磁束 Φ の時間微分 $d\Phi/dt$ を求めよ。

(5) 前問の結果を用いて、(3) で $k_x = k_y = 0$ の場合は TE 波として不適であることを示せ。

平成30年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [III] (125 点)

平成29年8月30日（水）16:20 - 17:40

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの冊子を開かないこと。

(2) 問題用紙はこの表紙を含めて4枚で、解答用紙は2枚である。

(3) 全ての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使用してよい。

(5) 解答にあたっては、最終結果のみでなく。その途中経過も記述すること。

(6) 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [III]

解答にはプランク定数 h を 2π で割った定数 $\hbar$ を用いてよい。

[III-A]　下に示される一次元ポテンシャル $V(x)$ 中に閉じ込められた質量 m の粒子の一次元運動について考える。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq L) \\ \infty & (x < 0,\, x > L) \end{cases}$$

問1. この粒子の波動関数 $\psi(x)$ が $0 \leq x \leq L$ で満たす、時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け。ただし、粒子のエネルギーを E とせよ。

問2. 波動関数 $\psi(x)$ の境界条件を全て書け。

問3. $0 \leq x \leq L$ の領域で $\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx$ とおき、問2の条件を適用して A, B, k を求めよ。ただし、A, B は実数であり、$\psi(x)$ は規格化されている。また k を表すのに整数 n を用いてよいが、その範囲を示せ。

問4. 問3で求めた $\psi(x)$ に対するエネルギー固有値 E を求めよ。

問5. $n = 2$ の $|\psi(x)|^2$ について、$-L \leq x \leq 2L$ の範囲でグラフを描け。

問6. $n = 1$ の $\psi(x)$ に対して、x の期待値 $\langle x \rangle$、x^2 の期待値 $\langle x^2 \rangle$、運動量 p の期待値 $\langle p \rangle$、p^2 の期待値 $\langle p^2 \rangle$ をそれぞれ求めよ。ここで以下の不定積分の公式を参考にしてよい。

$$\int x \sin^2 x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$$
$$\int x^2 \sin^2 x dx = \frac{x^3}{6} - \frac{2x^2 - 1}{8}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x + C$$

問7. ある演算子 Y の不確定性 ΔY を $\Delta Y = \sqrt{\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2}$ で見積もる。問6の結果を用いて $\Delta x \cdot \Delta p$ を求めよ。

[III-B]　水素原子に関するシュレディンガー方程式の解は、動径波動関数 $R_{nl}(r)$ と球面調和関数 $Y_l^m(\theta,\phi)$ の積 $R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi)$ で表される。ここで陽子は原点に静止しているとし、電子の位置を極座標 (r,θ,ϕ) で表している。軌道角運動量演算子 $\boldsymbol{l}$ の x, y, z 成分を l_x, l_y, l_z とし、量子化軸を z 軸にとる。演算子 $l_\pm = l_x \pm i l_y$ と定義すると、

$$
\begin{aligned}
l_\pm Y_l^m(\theta,\phi) &= \hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}\,Y_l^{m\pm1}(\theta,\phi)\\
l_z Y_l^m(\theta,\phi) &= m\hbar Y_l^m(\theta,\phi)
\end{aligned}
$$

を満たす。以下の問いに答えよ。

問 1. n, l, m の各量子数はそれぞれ何というか。

問 2. $l_x^2 + l_y^2$ を l_+ と l_- で表せ。

問 3. $\boldsymbol{l}^2 Y_l^m(\theta,\phi)$ を計算せよ。

電子はスピン角運動量をもつ。その自由度は 2 であり、2 つの固有関数を α, β とおく。スピン角運動量演算子を $\boldsymbol{s}$ とおき、その x, y, z 成分を s_x, s_y, s_z とし、量子化軸を z 軸にとる。演算子 $s_\pm = s_x \pm i s_y$ と定義すると

$$
\begin{aligned}
s_+\alpha &= 0, \quad s_+\beta = \hbar\alpha\\
s_-\alpha &= \hbar\beta, \quad s_-\beta = 0\\
s_z\alpha &= \frac{1}{2}\hbar\alpha, \quad s_z\beta = -\frac{1}{2}\hbar\beta\\
\boldsymbol{s}^2\alpha &= \frac{3}{4}\hbar^2\alpha, \quad \boldsymbol{s}^2\beta = \frac{3}{4}\hbar^2\beta
\end{aligned}
$$

の関係を満たす。

いま、軌道角運動量とスピン角運動量の両方に関係する演算子 $(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s})$ について考えてみる。$2p$ 軌道の固有関数を $R_{21}(r)Y_1^1(\theta,\phi)$, $R_{21}(r)Y_1^0(\theta,\phi)$, $R_{21}(r)Y_1^{-1}(\theta,\phi)$ とし、簡単のためこれらをそれぞれ u_1, u_0, u_{-1} と表す。さらにスピンまで考え $u_1\alpha$, $u_0\alpha$, $u_{-1}\alpha$, $u_1\beta$, $u_0\beta$, $u_{-1}\beta$ の 6 つの関数を考える。

問4. $(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s})=\frac{1}{2}(l_+s_-+l_-s_+)+l_zs_z$ と表せることを用いて、演算子 $(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s})$ を6つの関数に作用させた結果を求めたい。以下の空欄ア〜エに入る式を答えよ。

$$(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s})u_1\alpha = l_zs_zu_1\alpha=\frac{1}{2}\hbar^2u_1\alpha$$
$$(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s})u_0\alpha = \frac{1}{2}l_+s_-u_0\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\hbar^2u_1\beta$$
$$(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s})u_{-1}\alpha = \boxed{\text{ア}}$$
$$(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s})u_1\beta = \boxed{\text{イ}}$$
$$(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s})u_0\beta = \boxed{\text{ウ}}$$
$$(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s})u_{-1}\beta = \boxed{\text{エ}}$$

問5. 基底関数を $u_1\alpha$, $u_0\alpha$, $u_1\beta$, $u_0\beta$, $u_{-1}\alpha$, $u_{-1}\beta$ の順にとって、演算子 $(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s})$ の6行6列の行列表示をして、対角化をしたい。そのために、$u_0\alpha$, $u_1\beta$ を基底関数とする2行2列の部分行列について考え、2つの固有値を求めよ。この際、$R_{nl}(r)$, $Y_l^m(\theta,\phi)$, α, β に関する以下の正規直交性を用いてよい。ここで、$\delta_{nn'}$ はクロネッカーのデルタ、σ はスピン座標であり、波動関数の右肩の $*$ は複素共役を示す。

$$\int_0^\infty R_{nl}^*(r)R_{n'l}(r)r^2dr=\delta_{nn'}$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_l^{m*}(\theta,\phi)Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$
$$\sum_{\sigma=\pm\hbar/2}\alpha^*(\sigma)\alpha(\sigma)=\sum_{\sigma=\pm\hbar/2}\beta^*(\sigma)\beta(\sigma)=1$$
$$\sum_{\sigma=\pm\hbar/2}\alpha^*(\sigma)\beta(\sigma)=\sum_{\sigma=\pm\hbar/2}\beta^*(\sigma)\alpha(\sigma)=0$$

問6. 水素原子内の電子にはスピン軌道相互作用がはたらく。この相互作用エネルギー演算子は $\zeta(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s})$(ただし $\zeta>0$) と表せる。この相互作用によって $2p$ 軌道の縮退した6つの準位は2つのエネルギー準位に分裂する。各準位の縮退度およびスピン軌道相互作用エネルギーを答えよ。

問7. 軌道角運動量 $\boldsymbol{l}$ とスピン角運動量 $\boldsymbol{s}$ は合成されて全角運動量 $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{l}+\boldsymbol{s}$ が作られる。$\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{l}^2+\boldsymbol{s}^2+2(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s})$ の関係を使って、問6で述べた2つのエネルギー準位に対して、$\boldsymbol{j}^2$ の期待値をそれぞれ求めよ。

平成30年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [IV] (125 点)

平成29年8月31日（木）09:00 - 10:20

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの冊子を開かないこと。

(2) 問題用紙はこの表紙を含めて4枚で、解答用紙は2枚である。

(3) 全ての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使用してよい。

(5) 解答にあたっては、最終結果のみでなく。その途中経過も記述すること。

(6) 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [IV]

全問を通して

k_B : ボルツマン定数

$\hbar\ (= h/2\pi)$: プランク定数 h を 2π で割った数

と表記する。

[IV-A] 温度 T の熱浴に接して熱平衡状態にある系の分配関数は

$$Z(\beta) = \int_{E_0}^{\infty} \Omega(E)\, e^{-\beta E} dE \tag{1.1}$$

と定義される。$\Omega(E)$ は系の状態密度であり、$\Omega(E)dE$ は系のエネルギーが E から $E+dE$ までの範囲の状態数を表す。系のサイズ（粒子数 N あるいは体積 V）は十分大きく、$\Omega(E)$ を連続関数として扱う。E_0 は系の最低エネルギー、$\beta = \dfrac{1}{k_B T}$ は熱浴の逆温度である。

$\Omega(E)$ は単調増加関数である。また、(1.1) 式の積分が収束することから、任意の正数 α に対して

$$\lim_{E\to\infty} \Omega(E)\, e^{-\alpha E} = 0 \qquad (\alpha > 0) \tag{1.2}$$

が満たされる。これらのことから、被積分関数 $\Omega(E)\, e^{-\beta E}$ はある有限のエネルギー $E = E^*$ で最大となる。

問 1. (1.1) 式の右辺の被積分関数が

$$\Omega(E)\, e^{-\beta E} = \exp\left[-\beta E^* + \ln\Omega(E^*) + \frac{d^2 \ln\Omega(E^*)}{dE^{*2}} \frac{(E-E^*)^2}{2} + \cdots\right] \tag{1.3}$$

と展開できることを示せ。

問 2. 系のサイズが十分大きいので、(1.1) 式の積分が最大値近傍の積分

$$Z(\beta) \approx \int_{E^*-\frac{\Delta E}{2}}^{E^*+\frac{\Delta E}{2}} \Omega(E)\, e^{-\beta E} dE \tag{1.4}$$

によって近似できる。ここで、ΔE のとり方は、(1.3) 式の 2 次までの展開

$$\Omega(E)\, e^{-\beta E} \approx \exp\left[-\beta E^* + \ln\Omega(E^*) + \frac{d^2 \ln\Omega(E^*)}{dE^{*2}} \frac{(E-E^*)^2}{2}\right] \tag{1.5}$$

で近似できる範囲に選ぶ。その際、積分領域を $-\infty < E < \infty$ に拡げ、ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0) \tag{1.6}$$

を適用して、$Z(\beta)$ を近似的に求めよ。

問 3. 前問で求めた結果から、熱力学の要請（注参照）をすべて満足する関係式として

$$\ln Z(\beta) = -\beta E^* + \ln \Omega(E^*) \tag{1.7}$$

が導かれることを示せ。

問 4. ボルツマンの関係式（エントロピー S の統計力学的定義）、分配関数 Z とヘルムホルツの自由エネルギー F の関係式を用いて、(1.7) 式が熱力学関数の関係式

$$F = E - TS \tag{1.8}$$

と対応していることを示せ。

問 5. 内部エネルギーの微分

$$dE = T\,dS - p\,dV + \mu\,dN \tag{1.9}$$

と (1.8) 式を使って、ヘルムホルツの自由エネルギーの微分 dF を独立変数で表せ。p, V, μ, N は系の圧力、体積、化学ポテンシャル、粒子数を表す。

問 6. 次の関係式を示せ。

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right)_{V,N} = -\frac{E}{T^2} \tag{1.10}$$

（注）熱力学の要請

熱平衡状態において、内部エネルギー E は示量的で、粒子数 N や体積 V に比例する。また、1 粒子あるいは単位体積あたりの状態密度や分配関数を e^{ϕ} とすると、系全体の状態密度 Ω や分配関数 Z が $e^{N\phi}$ となる。

[IV-B] N 個の調和振動子で構成された系がある。すべての振動子は同じ固有振動数 ω をもち、1 個の振動子のエネルギー準位は $\frac{\hbar\omega}{2}, \frac{3\hbar\omega}{2}, \frac{5\hbar\omega}{2}, \cdots$ で与えられる。この系が温度 T の熱浴に接した熱平衡状態について、以下の問いに答えよ。但し、調和振動子の間には熱的接触によるエネルギーの移動はあるが、これらの相互作用は十分に弱く、各振動子の状態は独立なものとみなす。

問 1. i 番目の振動子について、量子数を $n_i(=0,1,2,\cdots)$ で表すと、エネルギーは $\left(n_i+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ である。系のエネルギー E を量子数を用いて表せ。

問 2. この系の分配関数が

$$Z(T)=\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)\right]^{-N} \tag{2.1}$$

となることを示せ。

問 3. 系のエネルギーの平均値 $\langle E\rangle$ を温度 T の関数として求めよ。

問 4. 比熱の温度依存性 $C(T)$ を求めよ。

問 5. $C(T)$ の概形をグラフに描け。ただし、温度 T を横軸にとること。

また、低温極限 $C_0=\lim_{T\to 0}C(T)$ および高温極限 $C_\infty=\lim_{T\to\infty}C(T)$ を計算し、グラフに書き入れよ。

問 6. 古典的調和振動子で構成される系では、比熱は温度に依存せず、高温極限値 C_∞ の値と等しい。古典系と量子系の比熱の差を温度 T で積分した量

$$A=\int_0^\infty\{C_\infty-C(T)\}\,dT \tag{2.2}$$

が零点エネルギーと一致することを示せ。