平成３１年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学［Ｉ］（125点） 平成30年8月29日（水） 13：00-14：20

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと。

(2) 問題用紙はこの表紙を含め４枚、解答用紙は２枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使って良い。

(5) 問題用紙は持ち帰ること。

物理学 [I]

[I-A] 図 1 に示す通り、固定された半径 R の大きな球の頂上付近に、質量 M で半径 a の均一な小球をのせてそっと離したところ、滑らずにゆっくりと右側に転がり始めた。大きな球に接しながら運動する小球の位置を、2 つの球の中心を結ぶ直線が鉛直軸となす角度 θ で表す。重力加速度の大きさを g、静止摩擦力の大きさを F、垂直抗力の大きさを N とする。初期条件を、$\theta = 0$ で初速を 0 と近似して、以下の問いに答えよ。

問 1. 滑らずに転がる小球の重心の運動方程式を、接線方向と法線方向について、それぞれ θ とその任意の階数の時間微分 $(\dot{\theta}, \ddot{\theta}, ..)$ を変数として用いて表せ。

問 2. 小球の中心周りの回転の角速度を ω とし、慣性モーメントが $\frac{2}{5}a^2M$ であることを用いて、回転運動の方程式を書け。

問 3. 滑らずに転がる小球では $(a + R)\dot{\theta} = a\omega$ が成立し、その運動エネルギーは重心の並進運動と重心周りの回転運動の寄与の和で与えられる。力学的エネルギーの保存則を用いて、$\dot{\theta}^2$ を角度 θ の関数として求めよ。

問 4. ある角度 θ_s を境に小球は滑り始めた。2 つの球の接触の静止摩擦係数 $\mu\ (> 0)$ を、θ_s のみを用いて表せ。

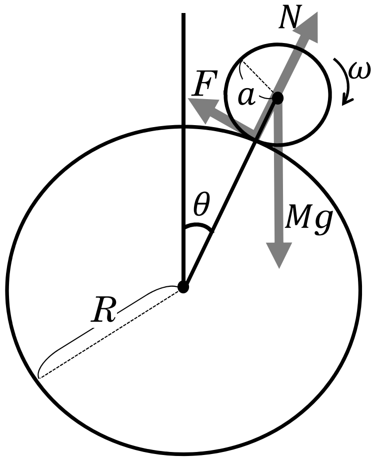


図 1

[I-B] ブランコをこぐ時には、ブランコの運動に合わせて膝を屈伸させて、自らの重心の位置を変化させる。そこで、図 2 のように、長さ $l(t)$ が時間変化する振り子を用いてブランコの運動を考察する。質量 m の質点の位置を、振り子の支点を原点 O、鉛直軸となす角を θ とした極座標 (r, θ) で表し、質点以外の質量や系に働く摩擦は無視する。重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えよ。

問 1. 質点の運動エネルギー T と、重力による位置エネルギー V を、r, θ およびそれらの時間微分を変数として用いて表せ。ただし、原点 O を位置エネルギーの基準とせよ。

振り子が途中でたわまない拘束条件のもとで、系のラグランジアンは、未定乗数を λ として $L = T - V - \lambda \{r - l(t)\}$ と書ける。θ に関するラグランジュ方程式から

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g \sin\theta = 0 \tag{1}$$

が得られる。ただし、$\dot{}$ は時間微分を表す。

問 2. r に関するラグランジュ方程式を求めよ。

問 3. 系のエネルギー $E \equiv T + V$ の時間変化 $\dot{E}$ を、r, θ およびそれらの時間微分を変数として用いて表せ。ただし、$\ddot{\theta}$ は (1) 式を用いて消去せよ。

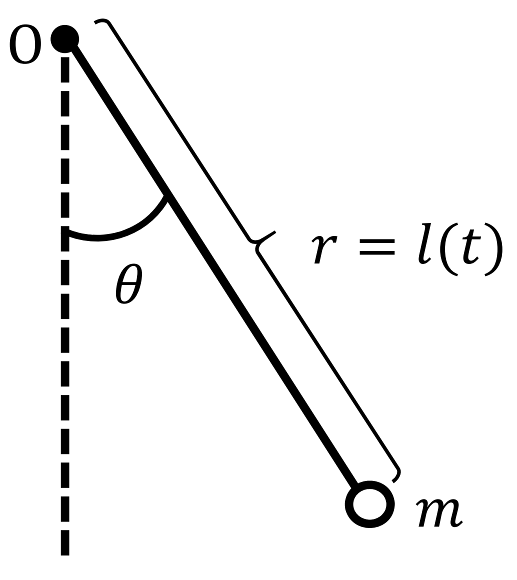


図2

以下では、振り子の最大振れ角が十分小さいために、$\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ と近似して答えよ。

問 4. 振り子の長さが定数 l_0 のとき、$\theta(t) = \theta_{\max}\cos\omega t$ のように単振動した。角振動数 ω を求めよ。

次に、振幅 $\theta_{\max}$ で振動している振り子の長さを、$l(t) = l_0 + \delta\sin(k\omega t + \phi)$ のように僅かに変化させる（ただし k は自然数で、また、$0 < \delta/l_0 \ll \theta_{\max}$）。このとき質点の運動は、1 周期 $T(= 2\pi/\omega)$ の間は $l(t) = l_0$ の場合と殆ど変わらず $\theta(t) \approx \theta_{\max}\cos\omega t$ と表せるが、時間をかけて何度も往復するにつれて徐々に振幅 $\theta_{\max}$ が変化する。このとき、物理量 A の 1 周期に渡る時間平均を $\langle A(t)\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_t^{t+T} A(t')\,dt'$ と表す。以下では、必要に応じて、

$$\langle\cos(p\omega t)\cos(q\omega t)\rangle = \langle\sin(p\omega t)\sin(q\omega t)\rangle = \frac{1}{2}\delta_{p,q}$$

$$\langle\sin(p\omega t)\cos(q\omega t)\rangle = \langle\sin(p\omega t)\rangle = \langle\cos(q\omega t)\rangle = 0$$

を用いて答えよ。ただし、p, q は任意の自然数、$\delta_{p,q}$ はクロネッカーのデルタである。

問 5. $\langle\dot{r}\ddot{r}\rangle = \langle\dot{r}\rangle = 0$ であることを示せ。

問 6. 問 3 で求めたエネルギー増加率 $\dot{E}$ の 1 周期平均は、$\langle\dot{E}\rangle \approx \boxed{\text{A}}\,\delta\theta_{\max}^2$ と近似できる（ただし、k の値により $\boxed{\text{A}}$ は 0 もとりうる）。この時、$\boxed{\text{A}}$ を m, ω, g, ϕ, k のうち必要なものを用いて表せ。また、$\langle\dot{E}\rangle$ が最大、最小となる k および ϕ をそれぞれ求めよ。

問 7. $k = 2, \phi = 0$ のとき、$\lambda \approx mg + \boxed{\text{B}}\,(\delta/l_0)\sin(2\omega t) + \boxed{\text{C}}\,\theta_{\max}^2 + \boxed{\text{D}}\,\theta_{\max}^2\cos(2\omega t)$ と書ける。$\boxed{\text{B}} - \boxed{\text{D}}$ を m, g を用いて表せ。

問 8. 前問の近似のもとで、$l(t)$ を x 軸、$\lambda(t)$ を y 軸にとり、$(l(t),\ \lambda(t))$ が 1 周期 T 中に描く軌跡の概略をグラフに描け。軌跡が時間発展する向きも矢印で記入せよ。また、$l = l_0,\ l_0 \pm \delta$ における λ を求め、図中に点で示せ。

平成３１年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学［Ⅱ］（125点） 平成30年8月29日（水） 14:40-16:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと。

(2) 問題用紙はこの表紙を含め４枚、解答用紙は３枚である。

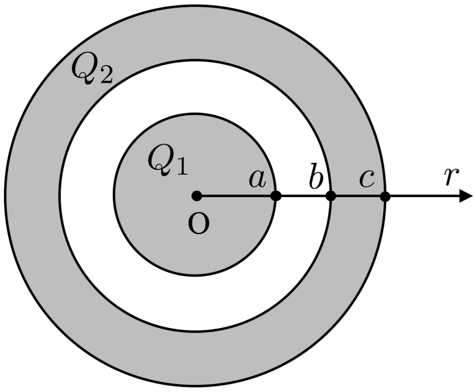
(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使って良い。

(5) 問題用紙は持ち帰ること。

物理学 [II]

[II-A] 図 1 のように、導体球（半径 a）と、同心の導体球殻（内径 b、外径 c）が、誘電率 ε_0 の真空中に置かれているものとする（$a < b < c$）。以下の問いに答えよ。



真空の誘電率：ε_0

図 1

問 1. 導体球に正の電荷 Q_1、導体球殻に正の電荷 Q_2 を与えたとする。球の中心からの距離を r とし、$0 < r < \infty$ における電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。また、$E(r)$ を距離 r の関数としてグラフに図示せよ。

問 2. $0 < r < \infty$ における電位 $V(r)$ を求めよ。また、$V(r)$ を距離 r の関数としてグラフに図示せよ。ただし、$r = \infty$ における電位を 0 とする。

以下では、$Q_2 = -Q_1$ とする。

問 3. 導体球–球殻間の静電容量 C を求めよ。

問 4. この系の持つ静電エネルギー U を、エネルギー密度を積分することで求めよ。

問 5. 導体球の半径を a から $a + \delta a$ に変化させる際のエネルギー U の変化分 δU を求めよ（ただし、$\delta a > 0,\ a + \delta a < b$）。

問 6. **問 5** の結果に基づいて、導体球の半径が a の時に導体球の表面に働く圧力の大きさ及び向きを求めよ。

[**II-B**] ビオ・サヴァールの法則は、電流素片 $I\Delta\boldsymbol{s}$ が相対位置 $\boldsymbol{r}$ に作る磁束密度 $\Delta\boldsymbol{B}$ を与える。この法則を、アンペールの法則を用いて導出する。ここで、電流は閉回路上のみを流れるため、回路の一部を切り取った電流素片は仮想的な概念であることに着目する。

図 2(a) に「点 Q から距離 $\Delta s(\equiv |\Delta\boldsymbol{s}|)$ だけ離れた点 P へ向かう強度 I の電流素片 $I\Delta\boldsymbol{s}$」を示す。この電流素片を含む閉回路として、図 2(b) のように「点 Q から点 P へ流れ込んだ電流 I が無限遠へ等方的に発散され、再び点 Q に向かって等方的に収束する」と捉え、この等方的な電流が相対位置 $\boldsymbol{r}$ に与える影響を考える。

図 2(c) のように、点 P, Q は x 軸上の $x = \Delta s/2, -\Delta s/2$ の位置にあるとし、その中点を原点 O とする。点 O を中心とした半径 $r(\equiv |\boldsymbol{r}|)$ の球面 S 上で、点 O から見て x 軸と角度 θ をなす円周 C を考える。r は Δs より十分大きく、円周 C 上のある点を点 R と置くと、$\angle$PRO $\approx \angle$QRO $(\equiv \Delta\theta/2)$ と近似できる。空間は真空で透磁率は μ_0 とする。以下の問いに答えよ。

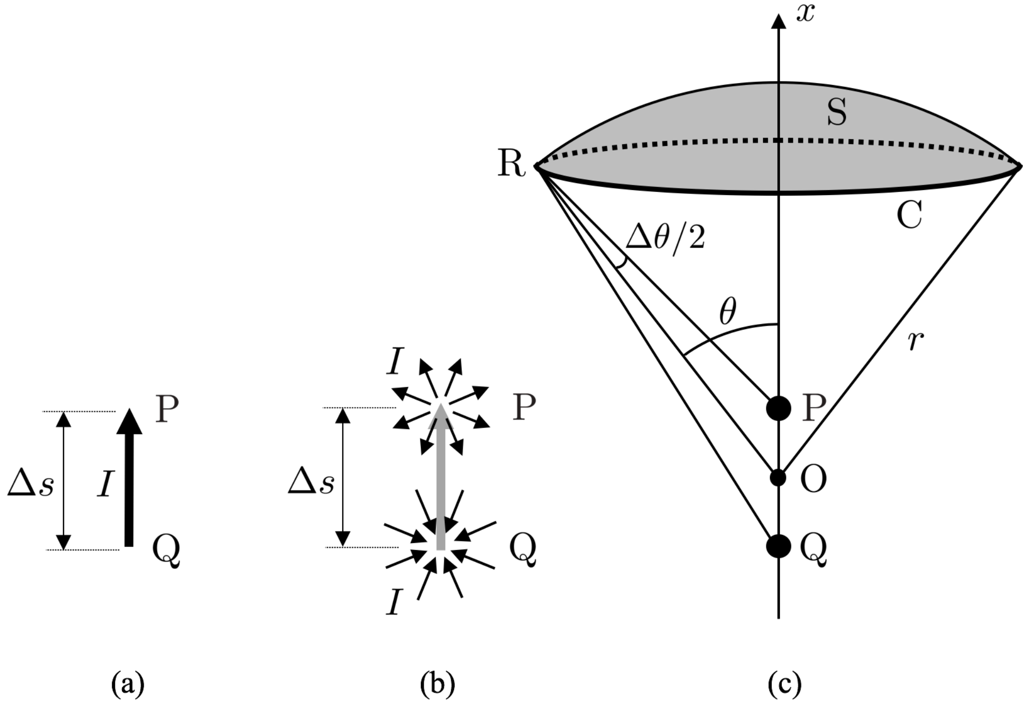


図 2

問 1. 円周 C の内部を貫く電流の総量とその向きを求めよ。
ヒント：点 O から見た、球面 S の円周 C で切り取られた部分（図 2(c) の灰色の部分）の立体角は $2\pi(1-\cos\theta)$ である。また、$\Delta\theta \ll 1$ であり、$\sin(\Delta\theta) \approx \Delta\theta$ として良い。

問 2. 点 R における磁束密度の大きさ ΔB を求めよ。x 軸正の方向から見て円周 C を描き、円周上における磁束密度 $\Delta\boldsymbol{B}$ の方向を図示せよ。

問 3. 正弦定理より $r\Delta\theta \approx \Delta s \sin\theta$ と近似できる。これを用い、ある閉回路を流れる電流に対するビオ・サヴァールの法則を導け。磁場の方向も考慮して、ベクトル量 $\Delta\boldsymbol{B}$ と $I\Delta\boldsymbol{s}$ で表現すること。

[**II-C**] 図 3 のように z 軸正の向きに伝搬する電磁波を考える。電場の振動方向を x 軸、磁場の振動方向を y 軸とする。また、角振動数を ω とする。

$z < 0$ の空間は真空（誘電率 ε_0、透磁率 μ_0）であり、$z \geq 0$ の空間は真電荷を含まない一様な物質（誘電率 ε、透磁率 μ、電気伝導率 σ）で占められているとする。誘電率は実数とする。以下の問いに答えよ。

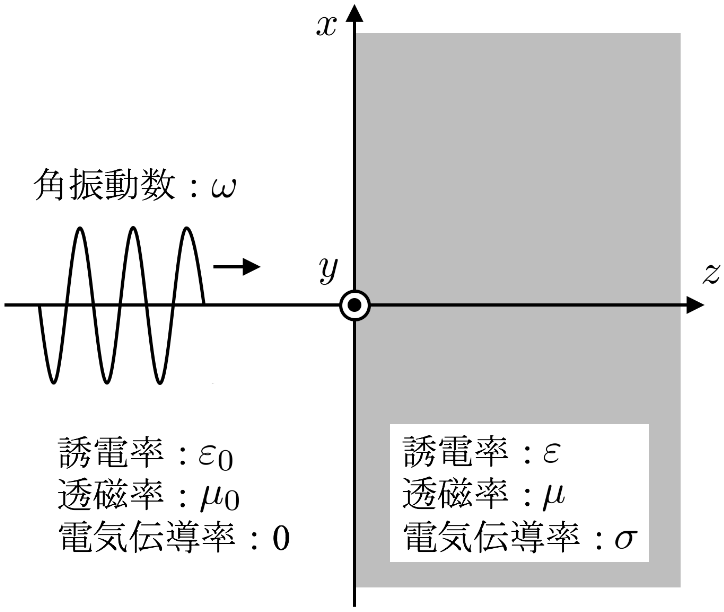


図 3

問 1. 電場を $\boldsymbol{E}$、磁場を $\boldsymbol{H}$ とする。電荷のない物質中のマクスウェル方程式を以下に示す。

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{H} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

これらを用いて、物質中の電場 $\boldsymbol{E}$ が満たす以下の形の方程式（電信方程式）を導き、定数 ζ, η を求めよ。

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \zeta \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

必要に応じて、次のベクトル公式を用いて良い。$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$

問 2. 電信方程式の解を求めるため、$\boldsymbol{E} = (E_0 e^{i(\omega t - \kappa z)}, 0, 0)$ と置く。κ と ω の関係を求めよ。

問 3. $\kappa = \beta - i\alpha$ と置く（α, β は共に実数）。α^2 および β^2 を求めよ。

問 4. 一様物質が導体であり、$\varepsilon\omega \ll \sigma$ である場合、α, β を近似的に求めよ。

問 5. **問 4** の状況下において、電場の振幅が E_0/e となる点の z の値 δ（$\equiv$ 表皮の深さ）を求めよ。また、電磁波が 1 波長進む間に振幅はおよそ何分の 1 になるか。$e^\pi \approx 23$ としてよい。

平成３１年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学［Ⅲ］（125点） 平成30年8月29日（水） 16:20-17:40

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと。

(2) 問題用紙はこの表紙を含め３枚、解答用紙は２枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使って良い。

(5) 問題用紙は持ち帰ること。

物理学 [III]

以下の問いにおいて、$\hbar$ は、プランク定数 h を 2π で割ったものを表している。

[III-A] 質量 m の粒子が、1 次元空間 (x 軸) においてポテンシャル $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ の中を運動している。以下の問いに答えよ。

問 1. 時間に依存しないシュレディンガー方程式とエネルギー固有値を書け。答えのみでよい。

問 2. この状態に、$V'(x) = \lambda x^2$ のポテンシャルが新たに付加したとする。その際の正確なエネルギー固有値を求めよ。

問 3. **問 1** の場合の規格化された固有関数は以下で表される。

$$\phi_n(x) = \left(\frac{\nu}{2^n n! \sqrt{\pi}}\right)^{1/2} H_n(\nu x) e^{-(1/2)\nu^2 x^2}$$

n は状態を指定する量子数で $n = 0, 1, 2, \cdots$、$H_n(\nu x)$ はエルミート多項式であり、$\nu = \sqrt{m\omega/\hbar}$ である。ここで、$\nu x = \xi$ とすると、次の漸化式が成り立つ。

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2nH_{n-1}(\xi)$$

この式を活用して、以下の二つの関係式が成り立つことを示せ。

$$\begin{aligned} x\phi_n(x) &= \sqrt{\frac{n}{2}}\frac{1}{\nu}\phi_{n-1}(x) + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{\nu}\phi_{n+1}(x) \\ x^2\phi_n(x) &= \frac{\sqrt{n(n-1)}}{2}\frac{1}{\nu^2}\phi_{n-2}(x) + \frac{2n+1}{2}\frac{1}{\nu^2}\phi_n(x) + \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2}\frac{1}{\nu^2}\phi_{n+2}(x) \end{aligned}$$

問 4. **問 2** で付加されたポテンシャルを摂動ポテンシャルとして、エネルギー固有値を摂動の 1 次までの範囲で求めよ。また、**問 2** で得られた解を、λ の 1 次のベキ級数で近似すると、この解と等しくなることを示せ。

次に、x, y の二次元平面において、ポテンシャル $V(x,y) = \frac{1}{2}m(\omega^2 x^2 + \omega'^2 y^2)$ の中を運動している粒子について考える。

問 5. この時のシュレディンガー方程式を書き、変数分離法を用いてエネルギー固有値を求めよ。

問 6. $\omega' = \omega$ とした時のエネルギー固有値を記載し、縮退度を求めよ。

[III-B] 原点に静止している陽子の周りに電子 (質量 m_e, 電荷 $-e$) が一つ束縛されている水素原子を考える。このときのエネルギー固有値は以下で表される。

$$E_n = -k\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n^2} \qquad (n \geq \ell + 1, |m| \leq \ell)$$

k はクーロンの法則の比例定数で、ここでは $k = 1$ とする cgs 単位系を用いる。また、n は主量子数、ℓ は方位量子数、m は磁気量子数である。

このときの水素原子内の電子の状態を表す波動関数は、電子の位置を極座標 (r, θ, ϕ) として、動径波動関数 $R_{n\ell}(r)$ と球面調和関数 $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ の積 $R_{n\ell}(r)Y_\ell^m(\theta, \phi)$ で表わされる。ここで、$R_{n\ell}(r)$ は、規格化定数を $N_{n\ell}$ とすると、以下の式で与えられる。

$$R_{n\ell}(r) = N_{n\ell}\, r^\ell\, e^{-r/(na_0)} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(\rho), \qquad \left(\rho \equiv \frac{2}{na_0}r,\ a_0 \equiv \frac{\hbar^2}{m_e e^2}\right)$$

また、$L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(\rho)$ はラゲール多項式で、以下のように表される。

$$L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(\rho) = \sum_{j=0}^{n-\ell-1} (-1)^j \frac{[(n+\ell)!]^2 \rho^j}{[(n-\ell-1-j)!(2\ell+1+j)!j!]}$$

問 1. 規格化された $1s$ $(n = 1, \ell = 0)$ の波動関数を求めよ。必要に応じて、$Y_0^0(\theta, \phi) = 1/\sqrt{4\pi}$, 及び、以下の公式を使用してよい。

$$\int_0^\infty r^M e^{-ar} dr = \frac{M!}{a^{M+1}} \qquad (a \text{ は正の実数、} M \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

問 2. $n = 1, 2, 3$ に対して取りうる ℓ と m の値を求めよ。また、エネルギー準位 E_n の縮退度を求めよ。

次に、z 方向に大きさ E の電場が加わった場合を考える。この電場により、電子には、$H' = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} eErY_1^0(\theta, \phi)$ のポテンシャルが付加される。

問 3. $n = 2$ の波動関数を用いて、次の H' の行列要素を考える。

$$< \ell' m' | H' | \ell m > \equiv \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R_{2\ell'}^*(r) Y_{\ell'}^{m'*}(\theta, \phi) H' R_{2\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$< 00|H'|10 >$、および $< 10|H'|00 >$ を求めよ。また、これらの行列要素以外はゼロになる理由を述べよ。ただし、$n = 2$ の動径波動関数は、以下の通りである。

$$R_{20}(r) = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/(2a_0)} \qquad R_{21}(r) = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{r}{a_0} e^{-r/(2a_0)}$$

また、必要に応じて、以下の正規直交性を用いてよい。

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_\ell^{m*}(\theta, \phi) Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

ここで、$\delta_{l,l'}$, $\delta_{m,m'}$ は、クロネッカーのデルタである。

問 4. 問 3 で求めた行列要素を用いて、永年方程式を解くことにより、$n = 2$ の 1 次の摂動エネルギーを求めよ。

問 5. 問 4 のように、摂動エネルギーが付加されることで、縮退がどう変化したか述べよ。

平成３１年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学［Ⅳ］（125点） 平成30年8月30日（木） 9:00-10:20

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと。

(2) 問題用紙はこの表紙を含め４枚、解答用紙は３枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 大問ごとに指定された解答用紙に解答すること。ただし、指定された解答用紙の裏面も使って良い。

(5) 問題用紙は持ち帰ること。

物理学 [IV]

全問を通して

k_{B}：ボルツマン定数

$\hbar$：プランク定数 h を 2π で割った数 $\left(\hbar = \dfrac{h}{2\pi}\right)$

と表記する。

[IV-A] 単一成分の多粒子系の内部エネルギー E をエントロピー S、体積 V、粒子数 N の関数として考え、$E = E(S, V, N)$ とする。それぞれの微小変化 $\mathrm{d}E$、$\mathrm{d}S$、$\mathrm{d}V$、$\mathrm{d}N$ の間には

$$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N \tag{1}$$

の関係がある。温度を T、圧力を p、化学ポテンシャルを μ とする。

問 1. (1) 式の右辺の各項が何を表すか簡単に説明せよ。

E、S、V、N はすべて示量的で

$$\lambda E = E(\lambda S, \lambda V, \lambda N) \tag{2}$$

の関係が成り立つ。ここに、λ は正の実数である。

問 2. (2) 式を λ について微分した後、$\lambda = 1$ とおいてみる。この式から、E を S, V, N, T, p, μ のすべてを用いて表せ。

熱力学ポテンシャル Ω を $\Omega = E - TS - \mu N$ として導入する。

問 3. Ω を S, V, N, T, p, μ のうち 2 つを用いて表せ。

問 4. 微小変化 $\mathrm{d}\Omega$ を (1) 式の右辺のように表せ。

問 5. N を Ω の偏微分として書き表せ。

[IV-B] 系のとりうる状態が $1, 2, 3, \cdots$ と番号付けできるとし、それらの状態のエネルギーの値を順に $E_1, E_2, E_3, \cdots$ とする。この系のアンサンブルがあって、アンサンブルに含まれる n 番目 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の状態の割合を p_n とする。

エントロピー S が、$S = -k_{\mathrm{B}} \sum_n p_n \log_e p_n$ によって与えられるものとする。E を定数として、$\sum_n p_n E_n = E$ および $\sum_n p_n = 1$ という拘束条件のもとで S が極大になるように p_n を決めることにする。

問 1. ラグランジュの未定乗数法を用いて、p_n が $p_n = \dfrac{1}{Z} \exp(-\beta E_n)$ の形に書けることを示せ。ここに、Z と β は（未定の）定数である。

問 2. 拘束条件 $\sum_n p_n = 1$ を書き直して、Z を β の関数として表せ。

問 3. 関係式 $\dfrac{\partial S}{\partial E} = k_{\mathrm{B}} \beta$ を導け。ただし、$\beta = \beta(E)$ および $Z = Z(\beta)$ である。

この結果と熱力学関係式 $\dfrac{\partial S}{\partial E} = \dfrac{1}{T}$ から $\beta = \dfrac{1}{k_{\mathrm{B}} T}$ であることがわかる。

問 4. 自由エネルギー F を $F = E - TS$ として導入する。$F = -k_{\mathrm{B}} T \log_e Z$ となることを示せ。

[**IV-C**] グランドカノニカル分布を用いて、フェルミ統計に従う自由電子の系を考える。電子のスピンの向きはそろっているものとし、スピン自由度については考えない。電子の状態は波数ベクトル $\mathbf{k}$ によって指定され、異なる波数の状態は独立である。波数 $\mathbf{k}$ の電子 1 個のエネルギーを $\epsilon(\mathbf{k})$、この波数の電子の個数を $n(\mathbf{k})$ とする。系は熱平衡状態にあり、温度を T、化学ポテンシャルを μ とする。

問 1. この系の大分配関数 Ξ の対数 $\log_e \Xi$ を考える。$\log_e \Xi = \sum_{\mathbf{k}} \log_e \Xi(\mathbf{k})$ と書いたときの $\Xi(\mathbf{k})$ を求めよ。

問 2. 全電子数の期待値 N を $N = \sum_{\mathbf{k}} \langle n(\mathbf{k}) \rangle$ と書いたときの $\langle n(\mathbf{k}) \rangle$ を求めよ。

問 3. 全エネルギーの期待値 E を $\mathbf{k}$ についての和として表せ。

この系の状態方程式は、圧力を p、体積を V として、$pV = k_{\mathrm{B}} T \log_e \Xi$ により与えられる。

問 4. 電子の質量を m として、$\epsilon(\mathbf{k}) = \dfrac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m}$ のとき、$pV = \dfrac{2}{3} E$ であることを示せ。ただし、必要ならば、$\mathbf{k}$ についての和を積分で評価してよい。

問 5. 古典的な理想気体の圧力 p_0 は、状態方程式 $\dfrac{p_0 V}{k_{\mathrm{B}} T} = N$ を満たす。$p > p_0$ であることを示せ。ただし、正の実数 x に対して成り立つ不等式 $\log_e(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$ を用いてよい。