九州大学理学部物理学科（物理学コース）
平成３１年度 第３年次編入試験
物理学

平成３０年７月７日（土）　９：００–１２：００

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの冊子を開かないこと。
(2) 問題冊子は表紙を含めて１０ページで、問題は [I] から [IV] までである。
(3) 全ての解答用紙に、受験番号と氏名を記入すること。
(4) 解答は指定された解答用紙に記入すること。特に指定のない場合には、裏面を使って解答してもよい。下書きには、問題冊子の余白や裏面などを利用し、解答用紙の余白には下書きをしないこと。
(5) 解答用紙に書ききれない場合や、用紙を取り替えたい場合は、試験監督に申し出ること。
(6) 問題冊子は持ち帰ってよい。

[I]　（80 点）

[I-1]　図 1 のように、質量 m の二個の質点 1 と 2 とが、バネ定数 k の二本のバネでつながれた系を考える。

全てのバネが自然長の時からの質点 1 と 2 の変位をそれぞれ x_1、x_2 とする。床との摩擦は無視する。

質点 2 に外力 $f_{\mathrm{ex}} = F \sin \omega t$ を加える。ここで F と ω は定数であり、t は時間である。

(1) 質点 1 と 2 に対する運動方程式を書け。

(2) $x_1 = A_1 \sin \omega t$、$x_2 = A_2 \sin \omega t$ とおくとき、振動の振幅 A_1 と A_2 を、m、k、F、ω で表せ。

(3) ω を十分小さい値から徐々に大きくしていったとき、A_1 と A_2 が極端に増幅される共振がおこる。このときの ω の値を求めよ。

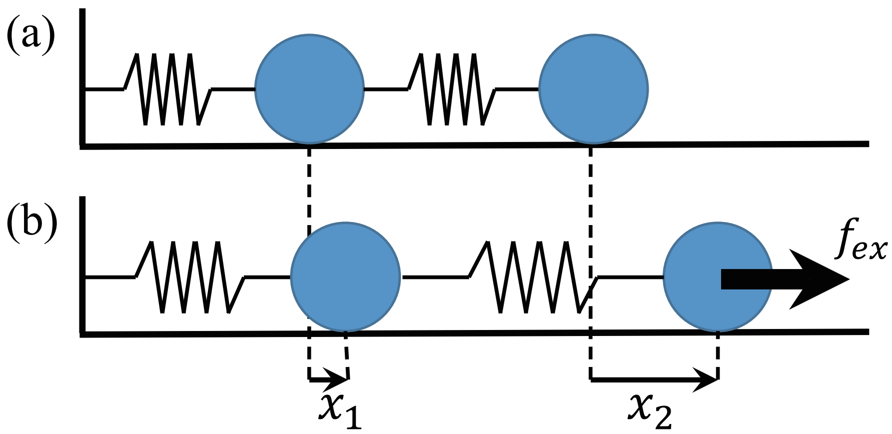

図 1　(a) ばねが自然長のときの状態。(b) 質点が変位した状態。

[I-2]　図 2 のように、質量 M、半径 a の一様な球が、中心に作用する力 $\boldsymbol{F} = (F, 0, 0)$ を受けながら粗い平面上（$z = 0$）を滑らずに転がる運動を考える。球の重心は x 軸に沿って動くものとする。

球の重心の座標を $(x, 0, a)$、y 軸に平行な重心軸のまわりの回転角を図の向きに θ、球が平面から受ける力を $\boldsymbol{R} = (R_x, R_y, R_z)$ とする。

(1) 球の重心軸のまわりの慣性モーメントが、$I = \frac{2}{5}Ma^2$ となることを示せ。
（ヒント：質量 M、半径 a の一様な円盤を考えよ。その円盤に垂直な中心軸のまわりの慣性モーメントが $I = \frac{1}{2}Ma^2$ となることをまず示す。）

(2) x と θ それぞれについての運動方程式を書け。

(3) 球が平面上を滑らない条件を x と θ を用いて表せ。ただし、$x = 0$ のときは $\theta = 0$ とする。

(4) 上の (2) と (3) の結果を用いて、x についての運動方程式が

$$\frac{7}{5}M\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

と書けることを示せ。

(5) 比 R_x/F を求めよ。

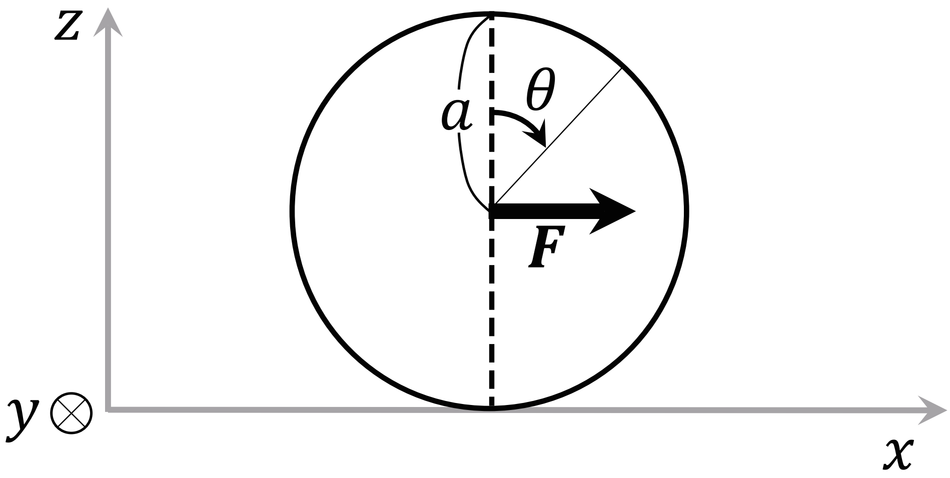

図 2

[II] （80 点）

図 3 の一点鎖線で示す円筒座標をとり、二つの円筒の中心軸を z 軸、その垂直方向に動径 r をとる。この座標で、$r \leq a$、$-l/2 \leq z \leq l/2$ に円柱状の一様な導体 A があり、$b \leq r \leq b+d$、$-l/2 \leq z \leq l/2$ に厚み d の中空円筒状の一様な導体 B がある。ここで、$b > a$、$l \gg b$、$b \gg d$ であり、端の効果は無視できるとして電場と磁場は z 方向には一様であると仮定する。

解答には SI 単位系を用い、真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ε_0 と μ_0、導体の比透磁率を 1 とする。解答には a、b、d、l、およびその他各問で指定された記号を適切に用いること。

[II-1]　初期状態は、円柱 A が電荷 $-Q$ に帯電し、円筒 B は電気的に中性とする。$r = b$ での電位をゼロと定義する。

(1) 円筒 B の内表面および外表面に分布する電荷について、その符号と電荷量を答えよ。

(2) $r \geq 0$ の静電場の向きと大きさをガウスの法則を使って求めよ。

この状態で、円筒 B を接地した。

(3) この時、円筒 B の内表面および外表面に分布する電荷について、その符号と電荷量を答えよ。

(4) $r \geq 0$ の静電場の向きと大きさをガウスの法則を使って求めよ。

(5) $r \geq a$ の範囲における静電位を求め、そのグラフを描け。

(6) この二重円筒による全静電エネルギーを求めよ。

(7) $r = a$ での静電位を ϕ_a とする．上の (6) で求めた静電エネルギーを ϕ_a を用いて表せ。

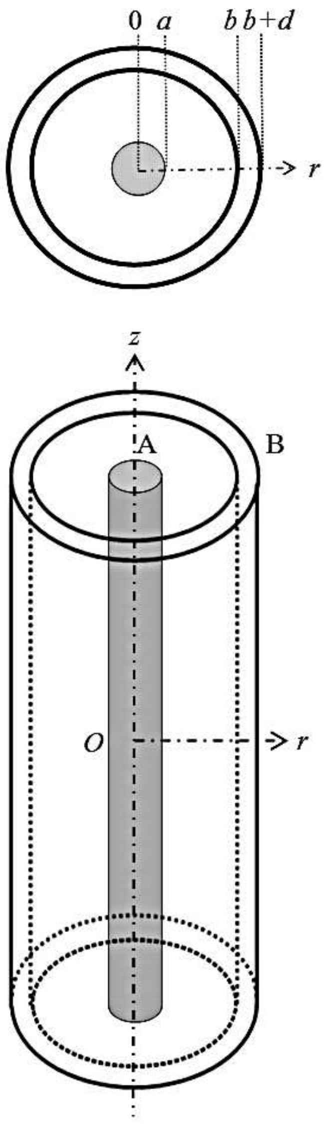

図 3

[II-2]　次に、図 4 のように、二重円筒の上端と下端を直流電源につなぎ、円柱 A に z 軸の正の方向に電流 I、円筒 B に z 軸の負の方向に電流 I をそれぞれ流した。各電流は、円柱と円筒の内部を一様に流れているとする。

(8) $z = 0$ において $r \geq 0$ での磁束密度の向きと大きさをアンペールの法則を使って求めよ。

(9) $d = 0$ として、この二重円筒内の全静磁エネルギーを求めよ.

(10) 上の (9) の結果を用いて、この二重円筒の自己インダクタンスを求めよ。

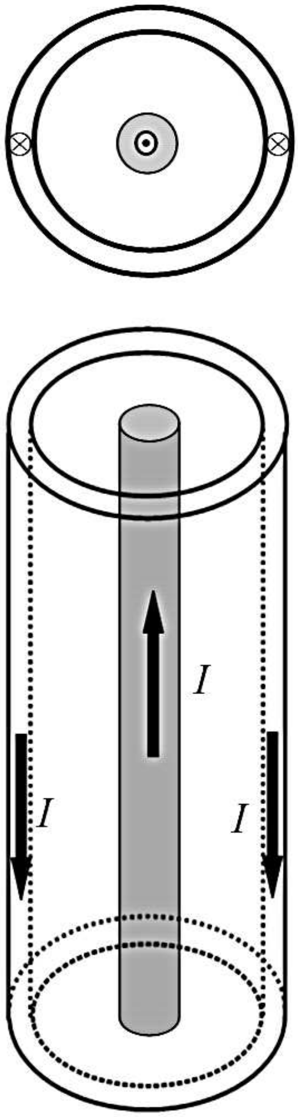

図 4

[III] （40 点）

x 軸にそって一定の張力 T でピンと張られた無限に長い弦を考える。$x<0$ の部分の線密度を σ_1 とし、$x>0$ の部分の線密度を σ_2 とする。このとき、x 軸に垂直方向の弦の微小変位 u を考えよう。

いま、$x<0$ の領域から $x>0$ の方向に向けて、角振動数 ω の入射波 $u_{\mathrm{i}}(x,t)$ が入射したところ、$x<0$ の領域では反射波 $u_{\mathrm{r}}(x,t)$ が、$x>0$ の領域では透過波 $u_{\mathrm{t}}(x,t)$ が生じた。ただし、変位 $u(x,t)$ は、$x<0$ および $x>0$ の領域ではそれぞれ、以下の波動方程式を満たすものとする。

$$\sigma_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (x<0)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (x>0)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $u_{\mathrm{i}}(x,t)$, $u_{\mathrm{r}}(x,t)$, $u_{\mathrm{t}}(x,t)$ が定数 A, B, C を用いて、各々、以下のように与えられるものとする。

$$u_{\mathrm{i}}(x,t) = A \exp\{i(k_1 x - \omega t)\}$$

$$u_{\mathrm{r}}(x,t) = B \exp\{i(k_2 x - \omega t)\}$$

$$u_{\mathrm{t}}(x,t) = C \exp\{i(k_3 x - \omega t)\}$$

このとき、k_1, k_2, k_3 を σ_1, σ_2, T, ω のうち必要な記号を用いて表せ。

(2) $x=0$ で、両側の変位が一致する条件を (1) の式を用いて表せ。

(3) $x=0$ で弦に働く張力 T の x 軸に垂直方向の成分が連続でなければならないが、これは「$x=0$ の両側での弦の傾きが等しい」ことと等価である。この条件を (1) の式を用いて表せ。

(4) 上の (2) と (3) の結果を用いて、B/A および C/A を σ_1, σ_2, T, ω のうち必要な記号を用いて表せ。

(5) (4) の結果を用いて、$\sigma_1 \gg \sigma_2$、および、$\sigma_1 \ll \sigma_2$ の極限で、$|B/A|$ と $|C/A|$ はどのような値に漸近するか答えよ。また、それぞれの場合に、入射波と反射波の位相差（絶対値）はどのような値に漸近するか答えよ。

[IV] （40 点）

熱力学に関する以下の問いに答えよ。ただし、P は系の圧力、V は系の体積、T は系の絶対温度、S は系のエントロピー、U は系の内部エネルギーとする。

(1) ヘルムホルツの自由エネルギー $F(T,V)$ が全微分であること、および、熱力学第 1 法則を用いて、

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

を示せ。

(2) (1) の結果を用いて、

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

を示せ。

以下では、1 モルの状態方程式が $\left(P + a/V^2\right)(V-b) = RT$ で与えられる気体を考える。ただし、R は気体定数、a, b は正の定数であり、$V > b$ とする。また、この気体は以下の熱力学操作によって液化や固化しないものとする。

(3) この気体の状態を準静的に変化させたとき、気体 1 モルの内部エネルギー変化 dU が $dU = C_v dT + (a/V^2)dV$ で与えられることを示せ。ただし、C_v はこの気体の定積モル比熱である。

(4) この気体の状態を準静的に変化させたとき、気体 1 モルのエントロピー変化 dS が $dS = (C_v/T)dT + \{R/(V-b)\}dV$ で与えられることを示せ。

(5) この気体 1 モルに対して、準静的に断熱変化をさせた際、T と V の間には、$T(V-b)^\beta =$ (V, T によらない定数)、の関係が成り立つ。β を求めよ。

(6) 体積 V_1 の容器に閉じ込めたこの気体 1 モルを体積 $V_2 - V_1$ の真空容器に接続して断熱自由膨張させた。十分時間が経った後の気体の温度ともとの気体の温度の差 ΔT を求めよ。